Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2008–2009 учебный год

Первый день

23, 24 января 2009 г.

Москва, 2008

Сборник содержит материалы для проведения регионального этапа XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, И. А. Бажов, А. Я. Белов-Канель, И. И. Богданов, А. А. Гаврилюк, А. А. Глазырин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Р. Г. Женодаров, Р. Н. Карасев, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, Н. С. Кудык, П. В. Мартынов, М. В. Мурашкин, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, В. А. Сендеров, Д. А. Терешин, С. И. Токарев, Б. В. Трушин, В. П. Филимонов, К. В. Чувилин, В. З. Шарич, В. А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К. В. Чувилин, И. И. Богданов.

Общие положения.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 23 и 24 января 2009 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и тому подобное). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В случае, если решение состоит из двух шагов. Правильно рассмотрен наиболее сложный из них.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. **Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в данной методической разработке или от других решений, известных жюри.** В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

В сборнике приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к некоторым задачам указаны рекомендуемые оценки (в баллах) предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

8 класс

8.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие? (*А. Канель*)

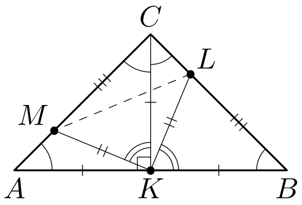
Ответ. Могут.

Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червю переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.

Комментарий. Только ответ без предъявления примера — 0 баллов.

8.2. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный. (*Р. Женодаров*)

Решение.



Медиана CK треугольника ABC является также высотой и биссектрисой, так как треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCA = 45°$. Отсюда $KC = KB$, и, значит, треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам ($KC = KB$, $BL = CM$) и углу между ними. Поэтому $KL = KM$, и из равенства $\angle BKL = \angle CKM$ следует $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90°$. Значит, треугольник LMK — прямоугольный равнобедренный.

Комментарий. Установлено только равенство отрезков KL и KM — 4 балла.

Установлена только перпендикулярность отрезков KL и KM — 4 балла.

8.3. По кругу выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 10$ в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске? (*П. Кожевников*)

Ответ. 15.

Вначале докажем, что выписанное число не больше 15. Выделим число 10, а оставшиеся 9 чисел разобьем на три тройки соседних чисел. Сумма чисел в этих трех тройках равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45 =$

$= 3 \cdot 15$, поэтому хотя бы в одной из рассматриваемых троек сумма чисел не больше 15.

Пример расстановки чисел, при котором число, выписанное Петей, равно 15, приведен на рис. 1.

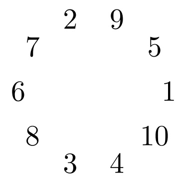


Рис. 1

Замечание. Приведенный пример не единственный.

Комментарий. Предъявлен верный пример, для которого наименьшее из выписанных чисел равно 15 — 3 балла.

Имеется только доказательство того, что наименьшее из выписанных чисел не больше 15 — 4 балла.

8.4. Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету. (*О. Подлипский, Б. Трушин*)

Решение.

Первое решение. Заплатив монету перед первым взвешиванием, мы имеем 99 монет, среди которых есть хотя бы одна настоящая. Положим на две чаши весов по одной монете. Если одна из них перевешивает, то она настоящая. Если же весы в равновесии, то либо обе взвешиваемые монеты настоящие, либо обе фальшивые. Заплатив одну из них, мы имеем 98 монет, среди которых есть хотя бы одна настоящая. Значит, мы опять либо на следующем шаге обнаружим настоящую монету, либо будем иметь 97 монет, среди которых есть хотя бы одна настоящая. Продолжим так делать и дальше. Если весы в некоторый момент выйдут из равновесия, то мы найдем настоящую монету. Если же все время будут показывать равновесие, то в конце концов, заплатив монету, мы будем иметь две монеты, среди которых есть хотя бы одна настоящая. Положим на две чаши весов по одной монете. Если одна из них перевешивает, то она настоящая. Если же весы в равновесии, то обе оставшиеся монеты настоящие.

Второе решение. Сначала покажем, что за два взвешивания можно найти группу из 33 монет, в которой есть настоящая.

Разделим монеты на 3 группы A, B, C по 33 монеты и одну в остатке. Заплатив этой монетой, сравним группы A и B (заметим, что хотя бы одна настоящая монета еще осталась). Если весы не остались в равновесии, то на перевесившей чашке есть хотя бы одна на-

стоящая. Если же весы в равновесии, то сравним группы A и C, заплатив монетой из B. Если одна перевесила, то в ней есть настоящая, а если весы в равновесии, то в каждой из групп A, B, C было поровну настоящих монет — значит, хотя бы по одной. Тогда в группах A и C осталось по настоящей монете.

Итого, мы нашли группу (назовем ее D) из 33 монет, в которой есть настоящая; кроме этой группы, у нас осталось еще хотя бы 65 монет (пусть они образуют группу E). Теперь сравним одну монету из группы D с каждой из остальных монет этой группы (платя каждый раз монетами из E). Тогда либо какая-то монета перевесит (она и будет настоящей!), либо все монеты будут весить поровну. В последнем случае, так как в D есть настоящая, то все монеты в D будут настоящими. В любом случае мы нашли хотя бы одну настоящую монету.

9 класс

9.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие? (*А. Канель*)

Ответ. Могут.

Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червю переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.

Комментарий. Только ответ без предъявления примера — 0 баллов.

9.2. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству
$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$
Докажите, что число $1-ab$ является квадратом рационального числа. (*Р. Женодаров*)

Решение.

Первое решение. Преобразуем исходное выражение:
$$0 = a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = ab(a+b)^2 + 2(a+b) + 1 =$$
$$= (ab-1)(a+b)^2 + (a+b)^2 + 2(a+b) + 1 = (ab-1)(a+b)^2 + (a+b+1)^2.$$
Заметим, что $a + b \neq 0$, ибо в противном случае $1 = 0$.

Значит, $1-ab = \left(\dfrac{a+b+1}{a+b}\right)^2$; поскольку числа a и b рациональны, то и $\dfrac{a+b+1}{a+b}$ — рациональное число, и утверждение задачи доказано.

Второе решение. Умножим данное равенство на ab и преобразуем: $a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + ab = 0 \iff a^2b^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + 1 = 1 - ab \iff 1 - ab = (ab(a+b)+1)^2$. Из последнего равенства следует утверждение задачи.

Третье решение. Если $ab = 0$, то утверждение верно: $1-ab = 1^2$. Если же $ab \neq 0$, то квадратное уравнение $abx^2 + 2x + 1 = 0$ имеет рациональный корень $(a+b)$ и рациональные коэффициенты. Из формулы корней квадратного уравнения следует, что его дискриминант является квадратом рационального числа. Но $D = 4(1-ab)$, и утверждение доказано.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой. (*Д. Скробот*)

Решение.

Пусть K — точка пересечения отрезков A_1D и AC (см. рис. 2). Из равенства $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$ вытекает, что четырехугольник AB_1A_1B вписан в окружность (с диаметром AB), поэтому $\angle A_1B_1K = 180^\circ - \angle A_1B_1A = \angle ABC$. Аналогично, четырехугольник BC_1B_1C вписан в окружность (с диаметром BC); следовательно, $\angle DB_1K = 180^\circ - \angle C_1B_1C = \angle ABC$. Получаем, что $\angle A_1B_1K = \angle DB_1K$. Из условия следует, что $\angle A_1KB_1 = \angle DKB_1 = 90^\circ$; значит, прямоугольные треугольники A_1B_1K и DB_1K равны (по катету и острому углу), откуда $A_1K = DK$. Последнее равенство означает, что точки A_1 и D симметричны относительно прямой AC; следовательно, треугольники A_1AC и DAC симметричны относительно этой же прямой. Тогда $\angle ADC = \angle AA_1C = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

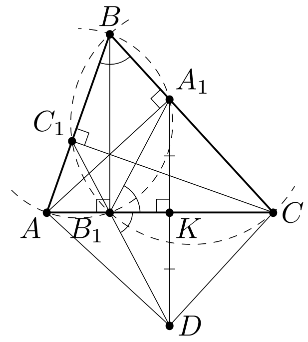
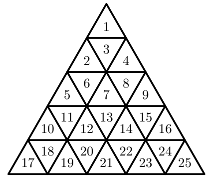


Рис. 2

Комментарий. Рассмотрены только частные случаи (равносторонний, равнобедренный треугольники и тому подобное) — 0 баллов.

9.4. На рисунке показан треугольник, разбитый на 25 меньших треугольников, занумерованных числами от 1 до 25. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5×5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних

клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)



(*А. Грибалко*)

Ответ. Нет.

Раскрасим треугольники и ячейки квадрата в черный и белый цвета так, как это показано на рис. 3.

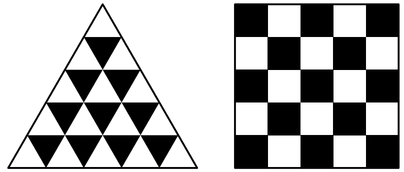


Рис. 3

Заметим, что из любого треугольника можно пройти в любой другой, причем в цепочке треугольников, образующих этот путь, каждые два соседних треугольника окрашены различно. То же верно и для клеток квадрата. Отсюда следует, что каждые два числа, записанные в треугольниках одного цвета, должны быть записаны и в клетках одного цвета.

Но у нас имеется 15 белых треугольников, что больше как количества черных (13) клеток, так и количества белых (12) клеток. Поэтому числа в квадрате 5×5 расставить требуемым образом невозможно.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Имеется только разбор частных случаев — 0 баллов.

10 класс

10.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена. (*И. Богданов*)

Ответ. 0.

Так как $g(x) = (f(x))^3 - f(x) = f(x)(f(x)-1)(f(x)+1)$, то корнями многочлена $g(x)$ являются корни трехчленов $f(x)$, $f(x)-1$ и $f(x)+1$. Ясно, что любое число может быть корнем только одного из них.

Пусть y_0 — искомая ордината вершины. Предположим, что $y_0 \neq 0$. Будем считать, что старший коэффициент в $f(x)$ положителен (иначе заменим $f(x)$ на $-f(x)$, при этом y_0 заменится на $-y_0$). Предположим, что $y_0 > 0$; тогда $f(x) > 0$ и $f(x)+1 > 0$ при всех x, значит, корни многочлена $g(x)$ являются корнями $f(x)-1$, а их не больше двух. Если же $y_0 < 0$, то трехчлены $f(x)$ и $f(x)-1$ имеют по два корня, значит, $g(x)$ имеет хотя бы 4 корня. Оба случая невозможны; значит, $y_0 = 0$.

Замечание. При $y_0 = 0$ $f(x)$ имеет один корень, $f(x)+1$ — ни одного, а $f(x)-1$ — два, поэтому $g(x)$ как раз имеет три корня.

Комментарий. Предъявлен только ответ (без верных обоснований) — 0 баллов.

Выражение $(f(x))^3 - f(x)$ разложено в произведение трех квадратных трехчленов — 2 балла.

Задача верно решена в предположении, что старший коэффициент трехчлена $f(x)$ положителен — 6 баллов.

Основные свойства графика квадратного трехчлена предполагаются известными.

10.2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n+100$ последовательных натуральных чисел.

(*В. Сендеров*)

Решение.

Например, при $n = (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 101 - 101)$ произведение первых $n+$ $+100$ натуральных чисел равно произведению n подряд идущих чисел, начиная с 102 и заканчивая $n+101$. Действительно, после сокращения равенство $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+100) = 102\cdot 103\cdot\ldots\cdot(n+101)$ принимает вид $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 101 = n+101$, что верно.

Замечание. Существует бесконечная серия подобных примеров.

Комментарий. Предъявлен любой из бесконечного семейства верных примеров — 7 баллов.

Любые рассуждения о существовании n, которые не дают построения примера — 0 баллов.

10.3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

(*К. Кноп*)

Ответ. Может.

Назовем набор из 17 настоящих монет *хорошим*, а набор из 12 настоящих и 5 фальшивых монет — *плохим*. Опишем возможные действия Кости.

Разобьем 17 монет из оставшегося у него набора на четыре группы A, B, C, D, содержащие 2, 3, 5, и 7 монет соответственно. При первом взвешивании на одну чашу весов положим группы A и B, а на другую — C. При втором взвешивании на одну чашу весов положим группы A и C, а на другую — D. Если в одном из взвешиваний весы не показали равновесие, то оставшийся у Кости набор плохой. Покажем, что если весы в обоих случаях показали равновесие, то оставшийся у Кости набор хороший. Пусть это не так, и в количества фальшивых монет группах A, B, C, D равны соответственно a, b, c, d. Тогда $a+b+c+d = 5$. Из равновесия при двух взвешиваниях следует $a+b = c$ и $a+c = d$, откуда $5 = a+b+c+d = a+b+(a+b)+(2a+b) = 4a+3b$. В случаях $a = 0$ или $b = 0$ получаем соответственно $b = \frac{5}{3}$ или $a = \frac{5}{4}$, что невозможно. Если же $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$, то $4a+3b \geqslant 7 > 5$. Противоречие.

Комментарий. Предъявлен только ответ без верных обоснований — 0 баллов.

Предъявлен неверный алгоритм взвешиваний (то есть алгоритм, который может дать одинаковый результат и для набора с фальшивыми монетами, и для набора без фальшивых монет) — 0 баллов.

Предъявлен правильный алгоритм взвешиваний без доказательства того, что он всегда приводит к правильному результату — 4 балла.

10.4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

(*П. Кожевников*)

Решение.

Из симметрии относительно линии центров ℓ имеем: $AB \parallel CD \perp$ $\perp \ell$, $OA = OB$, $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OCD = \angle ODC = \beta$ (см. рис. 4). По теореме об угле между касательной и хордой $\angle OAC =$ $= \angle OBA = \alpha$, $\angle OCA = \angle ODC = \beta$. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle OMC = \angle OAB = \alpha$; значит, и $\angle AOC = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle MOC$. Треугольники OAC и OMC равны по стороне (OC — общая) и двум углам, поэтому $OA = OM$ и $\angle AOC = \angle MOC = 90^\circ$.

В треугольнике ABM имеем $AO = OM = OB$; следовательно, он прямоугольный, то есть $\angle ABM = 90^\circ$. Так как $\angle AON = \angle MOC =$

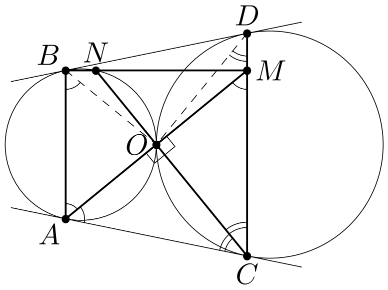


Рис. 4

$= 90°$, то AN — диаметр окружности ω_1, откуда $\angle ABN = 90°$. Итак, $\angle ABM = \angle ABN = 90°$, значит, точки B, M, N лежат на перпендикуляре к AB, проведенном через точку B.

Комментарий. Доказано только, что $BM \perp CD$ — 3 балла.

Доказано только, что $BN \perp CD$ — 3 балла.

11 класс

11.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена. *(И. Богданов)*

Ответ. 0.

Так как $g(x) = (f(x))^5 - f(x) = f(x)(f(x)-1)(f(x)+1)((f(x))^2+1)$, то корнями нашего многочлена являются корни трехчленов $f(x)$, $f(x) - 1$ и $f(x) + 1$ (поскольку многочлен $(f(x))^2 + 1$ всюду положителен). Ясно, что любое число может быть корнем только одного из них.

Пусть y_0 — искомая ордината вершины. Предположим, что $y_0 \neq \neq 0$. Будем считать, что старший коэффициент в $f(x)$ положителен (иначе заменим $f(x)$ на $-f(x)$, при этом y_0 заменится на $-y_0$). Предположим, что $y_0 > 0$; тогда $f(x) > 0$ и $f(x)+1 > 0$ при всех x, значит, корни многочлена $g(x)$ являются корнями $f(x) - 1$, а их не больше двух. Если же $y_0 < 0$, то трехчлены $f(x)$ и $f(x) - 1$ имеют по два корня, значит, $g(x)$ имеет хотя бы 4 корня. Оба случая невозможны; значит, $y_0 = 0$.

Замечание. При $y_0 = 0$ $f(x)$ имеет один корень, $f(x) + 1$ — ни одного, а $f(x) - 1$ — два, поэтому $g(x)$ как раз имеет три корня.

Комментарий. Предъявлен только ответ (без верных обоснований) — 0 баллов.

Выражение $(f(x))^5 - f(x)$ разложено в произведение квадратных трехчленов — 2 балла.

Задача верно решена в предположении, что старший коэффициент трехчлена $f(x)$ положителен — 6 баллов.

Основные свойства графика квадратного трехчлена предполагаются известными.

11.2. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице? *(И. Богданов)*

Ответ. 98.

Пусть мы заполнили таблицу согласно условию, а клетка A свободна. Так как при постановке в нее любого значка должна получаться линия из одинаковых значков, то существует линия, содержащая ее, в которой все остальные клетки заполнены крестиками, и то же самое верно для ноликов (эти линии должны быть, естественно, строкой и столбцом). В частности, все свободные клетки стоят в разных строках и столбцах.

A	○	○	?	○	○	○	○	○	○
×			×						
?	○	○	B	○	○	○	○	○	○
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						
×			×						

Рис. 5

	○	○	○	○	○	○	○	○	○
×		×	×	×	×	×	×	×	×
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*
×	○	*	*	*	*	*	*	*	*

Рис. 6

Предположим, что пустых клеток больше двух. Тогда для двух из них (скажем, для A и B) направления линии крестиков совпадают (то есть либо для обеих крестики стоят в их горизонталях, либо для обеих — в вертикалях) (см. рис. 5). Пусть крестики стоят в их столбцах, а нолики — в их строках; тогда в пересечении строки, содержащей A, со столбцом, содержащим B, должен стоять и крестик, и нолик (ибо это пересечение непусто); противоречие. Значит, пустых клеток не больше двух. Пример с двумя пустыми клетками приведен на рис. 6 (вместо звездочек могут стоять любые значки).

Комментарий. Только верный ответ — 1 балл.

Предъявлен верный пример, для которого число значков равно 98 — 3 балла.

Имеется только доказательство того, что число значков не меньше 98 — 4 балла.

11.3. Докажите, что $x\cos x \leqslant \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. (*В. Сендеров*)

Решение.

Первое решение. Так как $\sin t \leqslant t$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, то имеем

$$x\cos x = x\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leqslant x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi^2}{16} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \leqslant \frac{\pi^2}{16},$$

что и требовалось.

Второе решение. Перепишем доказываемое неравенство в виде $\sqrt{x\cos x} \leqslant \frac{\pi}{4}$. По неравенству о средних имеем $\sqrt{x\cos x} \leqslant \frac{x+\cos x}{2}$. В правой части стоит неубывающая функция (так как $(x+\cos x)' = 1 - \sin x \geqslant 0$); значит, $x + \cos x \leqslant \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, откуда и следует требуемое.

Комментарий. Неравенство доказано для конкретных значений переменной или для меньших промежутков — 0 баллов.

За использование неравенства $\sin x \leqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ без доказательства баллы не снижаются.

11.4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC. (*Д. Прокопенко*)

Решение.

Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Так как $OA_0 \perp BC$ и $B_0C_0 \parallel BC$, то A_0O — высота треугольника $A_0B_0C_0$. Аналогично, B_0O и C_0O — высоты треугольника $A_0B_0C_0$. Поэтому O является точкой пересечения высот треугольника $A_0B_0C_0$. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом 2, поэтому отрезок AH вдвое больше соответствующего отрезка A_0O.

Обозначим через P, M, Q соответственно центр описанной окружности треугольника HOA', середину отрезка HO и точку, симметричную точке P относительно прямой OH. Поскольку точка P равноудалена от точек H и O, точки P и Q лежат на серединном перпендикуляре к отрезку HO, следовательно, M — середина отрезка PQ. Тогда векторы $\overrightarrow{PH}$ и $\overrightarrow{QO}$ симметричны относительно точки M, а потому их проекции на AA' имеют равные длины.

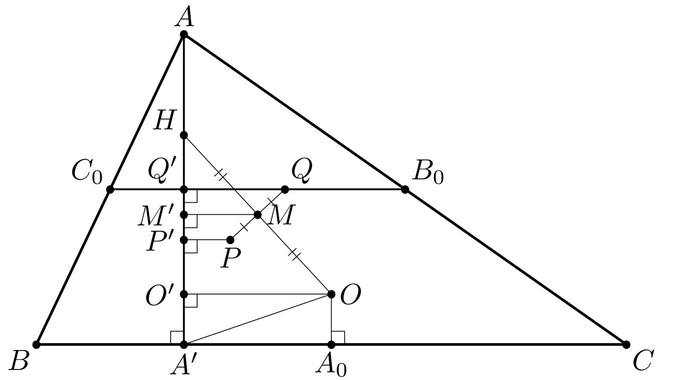


Рис. 7

Пусть O', P', Q' — проекции точек O, P, Q соответственно на высоту AA'. Тогда $P'H = Q'O'$; кроме того, точка P' — середина отрезка HA' (так как $PH = PA'$). Значит, $Q'A' = Q'O' + O'A' = P'H + OA_0 = \frac{A'H}{2} + \frac{AH}{2} = \frac{AA'}{2}$. Это означает, что Q' совпадает с серединой высоты AA', поэтому Q' и Q лежат на средней линии B_0C_0.