Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2008–2009 учебный год

Второй день

23, 24 января 2009 г.

Москва, 2008

Сборник содержит материалы для проведения регионального этапа XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, И. А. Бажов, А. Я. Белов-Канель, И. И. Богданов, А. А. Гаврилюк, А. А. Глазырин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Р. Г. Женодаров, Р. Н. Карасев, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, Н. С. Кудык, П. В. Мартынов, М. В. Мурашкин, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, В. А. Сендеров, Д. А. Терешин, С. И. Токарев, Б. В. Трушин, В. П. Филимонов, К. В. Чувилин, В. З. Шарич, В. А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К. В. Чувилин, И. И. Богданов.

Общие положения.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 23 и 24 января 2009 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и тому подобное). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В случае, если решение состоит из двух шагов. Правильно рассмотрен наиболее сложный из них.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. **Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в данной методической разработке или от других решений, известных жюри.** В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

В сборнике приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к некоторым задачам указаны рекомендуемые оценки (в баллах) предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

8 класс

8.5. На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник? (*И. Рубанов*)

Ответ. Начинающий.

Обозначим игроков A (начинающий) и B (его противник).

Приведем стратегию, позволяющую A гарантированно выиграть. Пусть он возьмет первым ходом цифру 3; тогда B вынужден брать 4 (иначе A вторым ходом ее возьмет и выиграет, составив число 34). Заметим, что тогда вторым своим ходом B не выиграет, ибо единственное двузначное число, содержащее 4 в своей записи и делящееся на 17 — это 34. Далее A возьмет 1, тогда B должен брать 5 (действительно, иначе этим ходом он не выиграет, а следующим ходом A возьмет 5 и составит 51). Тогда следующим ходом A возьмет 6 и выиграет, составив число 136.

Замечание. Существуют и другие выигрышные стратегии для A.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведена стратегия, «не работающая» хотя бы при одном варианте хода соперника — 0 баллов.

8.6. В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab+c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел (какими бы они ни были). (*И. Богданов*)

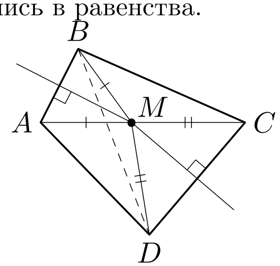
Решение.

Пусть исходные числа — x, y, z. Получим сначала числа $x+y$, $y+z$, $z+x$. Затем из клеток x, $y+z$, y получим $x(y+z)+y^2$; аналогично, получим числа $y(z+x)+z^2$ и $z(x+y)+x^2$. Сложив их, получаем требуемое: $x(y+z)+y^2+y(z+x)+z^2+z(x+y)+x^2=x^2+y^2+z^2+$ $+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2$.

8.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник. (*Н. Агаханов*)

Решение.

Пусть M — указанная точка на диагонали AC. Тогда, по свойству серединных перпендикуляров, $MA = MB$ и $MC = MD$. Поэтому $BD \leqslant BM + MD = AM + MC = AC$. Аналогично рассуждая для другой пары серединных перпендикуляров, получаем, что $AC \leqslant BD$. Значит, $BD = AC$, и все неравенства обратились в равенства.



Это означает в частности, что $BD = BM + MD$; это выполняется только тогда, когда M лежит на диагонали BD, то есть M — точка пересечения AB и CD; при этом она должна лежать на серединных перпендикулярах ко всем сторонам четырехугольника $ABCD$. Значит, его диагонали делятся точкой пересечения пополам (то есть $ABCD$ — параллелограмм) и равны. Значит, $ABCD$ — прямоугольник.

Комментарий. Доказано равенство длин диагоналей — 4 балла.

8.8. В футбольном турнире участвовало 8 команд, причем каждая сыграла с каждой ровно по одному разу. Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.) *(С. Токарев)*

Ответ. 22.

Докажем, что ровно по 6 ничьих может быть не более, чем у двух команд. Действительно, любая такая команда имеет либо 6, либо $6 + 3$ очка (в зависимости от того, выиграла или проиграла она свой результативный матч). Если таких команд три, то у двух из них поровну очков, значит, между собой они сыграли не вничью; этого не может быть, ибо они обе либо не выигрывали, либо не проигрывали ни одного матча.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1	1	1	1	1	3	3
B	1		1	1	1	1	1	3
C	1	1		3	0	1	1	1
D	1	1	0		3	1	1	1
E	1	1	3	0		1	1	1
F	1	1	1	1	1		1	1
G	0	1	1	1	1	1		1
H	0	0	1	1	1	1	1	

Рис. 1

Также ясно, что максимум одна команда все свои 7 матчей сыграла вничью.

Таким образом, сумма количеств ничьих у всех 8 команд не превосходит $7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 44$, а поскольку каждый ничейный матч учитывается дважды, то общее число ничьих в турнире

не превосходит $44/2 = 22$. Оно может равняться 22, что показано на рисунке (команды обозначены буквами A, B, C, D, E, F, G и H).

Комментарий. Только верный ответ — 1 балл.

Предъявлен верный пример, для которого общее число ничьих равно 22 — 3 балла.

Имеется только доказательство того, что общее число ничьих не больше 22 — 4 балла.

9 класс

9.5. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):

1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.
2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.
3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.

. . .

11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые — неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений? *(И. Рубанов)*

Ответ. 6.

Если листки лежат в следующем порядке:

$$\boxed{0}\ \boxed{10}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{5}$$

(для краткости на каждом листке указано число ложных утверждений левее него), то будет 6 верных утверждений.

Покажем, что больше быть не может. Предположим, что два листка с верными утверждениями расположены рядом; тогда число листков с ложными утверждениями левее каждого из них одно и то же; это невозможно, так как на этих листках написаны разные числа. Значит, на двух подряд идущих листках одно из утверждений ложное. Поэтому всего листков с ложными утверждениями не менее пяти, так как в каждой из пяти первых пар есть ложное.

Комментарий. Только верный ответ — 1 балл.

Предъявлен верный пример, для которого общее число верных утверждений равно 6 — 3 балла.

Имеется только доказательство того, что общее число верных утверждений не больше 6 — 4 балла.

9.6. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 8^m быть равной 6? *(В. Сендеров)*

Ответ. Не может.

Предположим, что сумма цифр числа 8^m при некотором $m > 1$ равна 8, и оно оканчивается на 6. Число 2^m не может оканчиваться на 06 или на 26, так как в этом случае оно не делится на 4. Следовательно, оно оканчивается на 16 (иначе сумма цифр будет больше 8), и поэтому имеет десятичную запись $\underbrace{\overline{1000\ldots016}}_{k\text{ цифр}}$. Тогда $8^m = 10^k + 16$, то есть число $10^k + 16$ — степень двойки.

Но если $k \geqslant 5$, то $10^k + 16 = 2^4(2^{k-4} \cdot 5^k + 1)$, и в скобках получаем нечетный множитель, больший 1. Остается рассмотреть случаи $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$: $10^2 + 16 = 4 \cdot 29$; $10^3 + 16 = 8 \cdot 127$; $10^4 + 16 = 32 \cdot 313$. Таким образом, $10^k + 16$ не является степенью восьмерки ни при каком натуральном k, что и требовалось доказать.

Комментарий. Предъявлен только ответ (без верных обоснований) — 0 баллов.

Задача сведена к тому, что не существует степеней 8 вида $\underbrace{\overline{1000\ldots016}}_{k\text{ цифр}}$ — 1 балл.

9.7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω. (*Т. Емельянова*)

Решение.

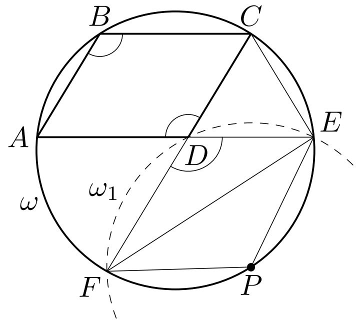


Рис. 2

Пусть $\angle ABC = \angle ADC = \angle EDF = \alpha$; по условию, $\alpha > 90^\circ$ (см. рис. 2). Так как $BC \parallel AD$, то $ABCE$ — равнобокая трапеция, откуда $\angle ECF = \angle BCE - \angle BCD = \alpha - (180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ$. Далее, пусть P — центр описанной окружности ω_1 треугольника DEF. Поскольку $\angle EDF > 90^\circ$, точка P лежит внутри угла EDF, причем точки D и P лежат по разные стороны от прямой EF. В окружности ω_1 дуга EDF дополняет дугу величины 2α, на которую опирается угол EDF, до полной окружности, поэтому центральный угол EPF равен $360^\circ - 2\alpha$. Получаем, что $\angle ECF + \angle EPF = (2\alpha - 180^\circ) + (360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$; значит, четырехугольник $CEPF$ вписанный, то есть точка P лежит на окружности ω, что и требовалось доказать.

9.8. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0.) (*С. Токарев*)

Ответ. 20.

Мы будем оценивать число S — сумму количеств ничьих всех 8 шахматистов. Эта сумма ровно в 2 раза больше числа ничьих в турнире (каждую ничью посчитали 2 раза — у обоих игроков). Докажем, что $S \leqslant 41$ — тогда число ничейных партий в турнире не превосходит 20, так как оно целое. Это число и будет ответом, так как пример с 20 ничьими существует (см. рис. 3; шахматисты обозначены буквами A, B, C, D, E, F, G и H).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		1/2	1/2	1	1/2	1	1/2	1/2
B	1/2		1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
C	1/2	0		1/2	1/2	1	1/2	1
D	0	1/2	1/2		1	1/2	1/2	1/2
E	1/2	1/2	1/2	0		1/2	1/2	1
F	0	1/2	0	1/2	1/2		1	1/2
G	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0		1/2
H	1/2	1/2	0	1/2	0	1/2	1/2	

Рис. 3

Заметим сразу, что если два человека никому не проиграли, то они сыграли друг с другом вничью и потому, по условию, имеют разное число очков; то же самое верно, если они ни у кого не выиграли. Отсюда сразу следует, что есть не больше одного человека с 7 ничьими и не больше 2 человек с 6 ничьими (такой человек либо никому не проиграл, либо ни у кого не выиграл). Кроме того, людей с 5 ничьими, у которых обе результативные партии выиграны или обе проиграны — тоже не больше, чем по одному. Заметим, что все остальные игроки с 5 ничьими имеют по $3\frac{1}{2}$ очка.

Пусть есть человек X с 7 ничьими; тогда других игроков с 5 ничьими быть не может, ибо у них будет столько же очков, сколько у X, причем они с X сыграют вничью. Значит, людей с 5 ничьими в этом случае не больше 2, и $S \leqslant 7 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 41$.

Пусть теперь человека с 7 ничьими нет. Оценим в этом случае количество игроков с 5 ничьими и $3\frac{1}{2}$ очками. Каждый из них должен был сыграть с каждым не вничью; однако у них всего по 2 результативных партии — значит, их не больше 3, а всего игроков с 5 ничьими не больше $3 + 2 = 5$. Значит, и в этом случае $S \leqslant 2 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 = 41$, что и требовалось.

Комментарий. Только верный ответ — 1 балл.

Предъявлен верный пример, для которого общее число ничьих равно 20 — 3 балла.

Имеется только доказательство того, что общее число ничьих не больше 20 — 4 балла.

10 класс

10.5. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6? *(В. Сендеров)*

Ответ. Не может.

При $m = 1, 2, 3$ последняя цифра числа 2^m не равна 6. Предположим, что сумма цифр числа 2^m при некотором $m > 3$ равна 8, и оно оканчивается на 6. Число 2^m не может оканчиваться на 06 или на 26, так как в этом случае оно не делится на 4. Следовательно, оно оканчивается на 16 (иначе сумма цифр будет больше 8), и поэтому имеет десятичную запись $\overline{\underbrace{1000\ldots016}_{k \text{ цифр}}}$. Тогда $2^m = 10^k + 16$, то есть число $10^k + 16$ — степень двойки.

Но если $k \geqslant 5$, то $10^k + 16 = 2^4(2^{k-4}\cdot 5^k + 1)$, и в скобках получаем нечетный множитель, больший 1. Остается рассмотреть случаи $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$: $10^2 + 16 = 4 \cdot 29$; $10^3 + 16 = 8 \cdot 127$; $10^4 + 16 = 32 \cdot 313$. Таким образом, $10^k + 16$ не является степенью двойки ни при каком натуральном k, что и требовалось доказать.

Комментарий. Предъявлен только ответ (без верных обоснований) — 0 баллов.

Задача сведена к тому, что не существует степеней 2 вида $\overline{\underbrace{1000\ldots016}_{k \text{ цифр}}}$ — 1 балл.

10.6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω. *(Р. Женодаров)*

Решение.

Пусть I — центр окружности ω; положим $\alpha = \angle BAC$. Так как в четырехугольнике AB_1IC_1 углы AB_1I и AC_1I прямые, то $\angle B_1IC_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - \alpha$. Поэтому в окружности ω мера дуги $\overset{\frown}{B_1C_1}$,

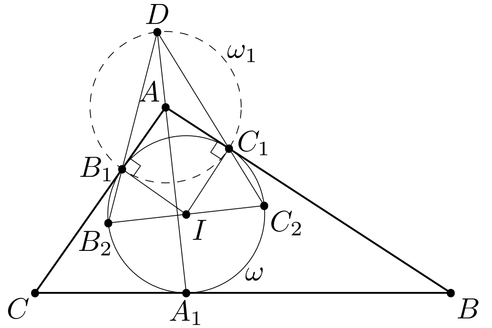


Рис. 4

не содержащей точки A_1, равна $180^\circ - \alpha$. Из равенств $AB_1 = AC_1 = AD$ следует, что A является центром окружности ω_1, описанной вокруг треугольника B_1C_1D. Центральный угол B_1AC_1 окружности ω_1 вдвое больше вписанного угла B_1DC_1, следовательно, $\angle B_1DC_1 = \alpha/2$. Далее, угол B_1DC_1 равен полуразности величин дуг $\overset{\frown}{B_2C_2}$ и $\overset{\frown}{B_1C_1}$, откуда $\overset{\frown}{B_2C_2} = 2\angle B_1DC_1 + \overset{\frown}{B_1C_1} = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$. Полученное равенство $\overset{\frown}{B_2C_2} = 180^\circ$ означает, что B_2C_2 — диаметр окружности ω.

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, если точку A_1 заменить на произвольную точку прямой BC. При этом можно доказать, что $B_2C_2 \perp AA_1$.

10.7. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ удовлетворяют равенствам $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \ldots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009}^2 = x_{2009}^2 - x_{2009}x_1 + x_1^2$. Докажите, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ равны. *(В. Сендеров)*

Решение.

Без ограничения общности можно считать, что x_1 — наибольшее (или одно из наибольших) среди данных чисел. Тогда из равенства $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$ следует $x_1^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3) - x_2(x_1 - x_3) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - x_2) = 0$. В силу выбора числа x_1 имеем $x_1 \geqslant x_2$; поэтому $x_1 - x_2 \geqslant 0$, значит, $x_1 + x_3 - x_2 > 0$. Отсюда следует, что $x_1 - x_3 = 0$, то есть $x_3 = x_1$, и x_3 — также одно из наибольших среди данных чисел.

Рассуждая далее таким же образом, получаем: $x_5 = x_3$, $x_7 = x_5, \ldots x_{2009} = x_{2007}$, $x_2 = x_{2009}$, $x_4 = x_2$, $\ldots$, $x_{2008} = x_{2006}$. Таким образом, все данные 2009 чисел равны.

Комментарий. Одно из равенств (или каждое из равенств) преобразовано к виду $(x_1 - x_3)(x_1 + x_3 - x_2) = 0$ — 1 балл.

Имеется идея рассмотрения наибольшего из чисел — 1 балл.

10.8. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании? (*П. Кожевников*)

Ответ. 160.

Если два человека не являются друзьями, то будем говорить, что они являются *недругами*. Общее число пар людей в данной компании равно $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$, поэтому достаточно доказать, что минимальное число пар недругов равно 30.

Докажем, что меньше чем 30 пар недругов быть не могло. Пусть это не так. Тогда найдется человек A, у которого не более двух недругов (если у каждого человека не менее трех недругов, то число пар недругов не меньше, чем $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$). Пусть A при некоторой удачной рассадке оказался за столом T. По условию, за столом T всего 5 человек. Так как у A не более двух недругов, то за одним из оставшихся трех столов все сидящие являются друзьями A. Значит, если пересадить A за этот стол (а в остальном рассадку не менять), то новая рассадка окажется удачной, но за столом T будут сидеть 4 человека, что противоречит условию.

Приведем пример, удовлетворяющий условию, в котором имеется ровно 30 пар недругов. Разобьем всех людей на 5 четверок, и пусть любая пара людей из одной четверки — недруги, а любая пара из разных четверок — друзья. В таком случае у каждого человека ровно 3 недруга, и всего имеется $\frac{3 \cdot 20}{2} = 30$ пар недругов. В описанной ситуации рассадка является удачной тогда и только тогда, когда люди из одной четверки оказываются за разными столами. Тем самым, удачные рассадки существуют, и при любой удачной рассадке за каждым столом окажется по одному человеку из каждой четверки, то есть ровно 5 человек.

Комментарий. Только верный ответ — 1 балл.

Доказано, что у каждого человека в компании не более 16 друзей (то есть не менее трех недругов), или приведено любое другое доказательство того, что пар друзей не больше 160 — 3 балла.

Предъявлен верный пример компании со 160 парами друзей (с доказательством того, что этот пример подходит) — 3 балла.

11 класс

11.5. На плоскости провели несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Сколько прямых могло быть проведено, если на одной из проведенных прямых отмечена одна точка, на другой — три, а на третьей — пять? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет. (*И. Богданов*)

Ответ. 8 прямых.

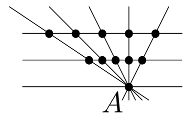


Рис. 5

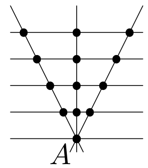


Рис. 6

Пусть ℓ_1, ℓ_3, ℓ_5 — прямые, на которых отмечены одна, три и пять точек, соответственно, а A — единственная отмеченная точка на ℓ_1. Тогда все остальные прямые проходят через эту точку (назовем эти прямые *меридианами*) или параллельны ℓ (назовем их *параллелями*). Заметим, что каждый меридиан пересекается с каждой параллелью, и все такие точки пересечения различны; более того, этими точками исчерпываются все точки пересечения, кроме A. Значит, на каждом меридиане отмечено поровну точек, и на каждой параллели — тоже. Тогда из условия следует, что либо на каждом меридиане по три точки, а на каждой параллели — по 5 (а значит, есть 2 параллели и 5 меридианов, рис. 5), либо наоборот (а значит, есть 4 параллели и 3 меридиана, рис. 6). В обоих случаях получилось 8 прямых.

Комментарий. Приведен пример с 8 прямыми — 2 балла.

Доказано, что других ответов нет — 5 баллов.

11.6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$. (*И. Богданов*)

Решение.

Поскольку треугольник ABD равнобедренный, получаем $\angle ADB = \angle ABD$. Так как четырехугольник $ABDK$ вписан, то $\angle AKB = \angle ADB$ и $\angle ABD = 180^\circ - \angle AKD = \angle LKA$. Значит, в треугольнике BKL высота KA является биссектрисой, а значит, и медианой; тогда точки L и B симметричны относительно AC, поэтому отрезки CL и CB также симметричны. Значит, их длины равны.

11.7. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k+b^k+c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k? *(В. Сендеров)*

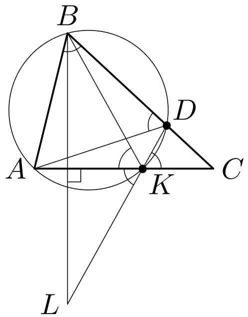


Рис. 7

Ответ. Верно.

Обозначим через $\alpha_2(d)$ степень, с которой входит 2 в разложение числа d на простые множители.

Если среди чисел a, b и c есть одно или три нечетных числа, то при любом натуральном k число $a^k+b^k+c^k$ нечетно, то есть можно положить $n=1$. Все три числа четными быть не могут. Пусть теперь среди них ровно одно четное — скажем, a. Исследуем, чему может быть равно число $\alpha_2(b^k+c^k)$.

При четном k каждое из чисел b^k и c^k при делении на 4 дает остаток 1, поэтому $\alpha_2(b^k+c^k)=1$. Пусть k нечетно. Тогда $b^k+c^k = (b+c)(b^{k-1}-b^{k-2}c+\ldots+c^{k-1})$. Во второй скобке стоит сумма нечетного количества (k) нечетных слагаемых, то есть нечетное число. Таким образом, $\alpha_2(b^k+c^k)\leqslant\alpha_2(b+c)$ для любого k.

Заметим теперь, что если $k>\alpha_2(b+c)$, то $\alpha_2(a^k)\geqslant k>\alpha_2(b+c)\geqslant\alpha_2(b^k+c^k)$. Значит, $\alpha_2(a^k+b^k+c^k)\leqslant\alpha_2(b+c)$ при всех $k>\alpha_2(b+c)$. Тогда ясно, что можно выбрать $n>\alpha_2(b+c)$ так, что и при $k\leqslant\alpha_2(b+c)$ число $a^k+b^k+c^k$ не будет делиться на 2^n, что и требовалось.

Замечание. Аналогично $\alpha_2(d)$ можно определить $\alpha_p(d)$ для любого простого p. Можно показать, что при любом нечетном простом p последовательность $\{\alpha_p(a^k+b^k+c^k)\}$ может оказаться неограниченной.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

11.8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, а сумма любых двух соседних чисел не меньше ста. Найдите минимальную возможную сумму всех чисел. *(И. Богданов)*

Ответ. 580.

Первое решение.

Рассмотрим расстановку, удовлетворяющую условию, и соединим каждые два соседних числа стрелкой от меньшего к большему. Так

как общее количество стрелок нечетно, найдутся две подряд идущих стрелки, направленные в одну сторону: $a\to b\to c$. Значит, $b\leqslant c-20$, $a\leqslant b-20\leqslant c-40$, поэтому $100\leqslant a+b\leqslant 2c-60$, откуда $c\geqslant 80$. Все числа, кроме c, можно разбить на 5 пар соседних чисел; значит, сумма всех чисел не меньше $80+5\cdot 100=580$.

Один из примеров расстановки, в которой эта оценка достигается, приведен на рис. 8.

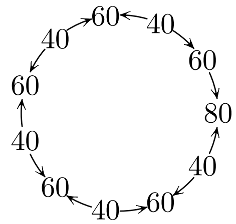


Рис. 8

Второе решение. Приведем другое доказательство того, что сумма не меньше 580. Заметим, что в любой паре соседних чисел одно из них не меньше 60 (если большее из них меньше 60, то второе меньше 40, а их сумма меньше 100). Рассмотрим максимальное число c. Разобьем остальные числа на пары соседних (сумма в каждой паре не меньше 100, значит, сумма всех этих 10 чисел не меньше 500). Далее, в каждой паре отметим число, не меньшее 60; также отметим число c. Мы отметили 6 чисел из 11, значит, два из них — соседние. Тогда большее из них не меньше $60+20=80$, поэтому и $c\geqslant 80$. Значит, сумма всех чисел не меньше $80+500=580$.

Комментарий. Только верный ответ — 1 балл.

Предъявлен верный пример с суммой 580 — 3 балла.

Имеется только доказательство того, что сумма не меньше 580 — 4 балла.