B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
6	18	-13	6	58500	9
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
2,5	0,25	36	35	4	12

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

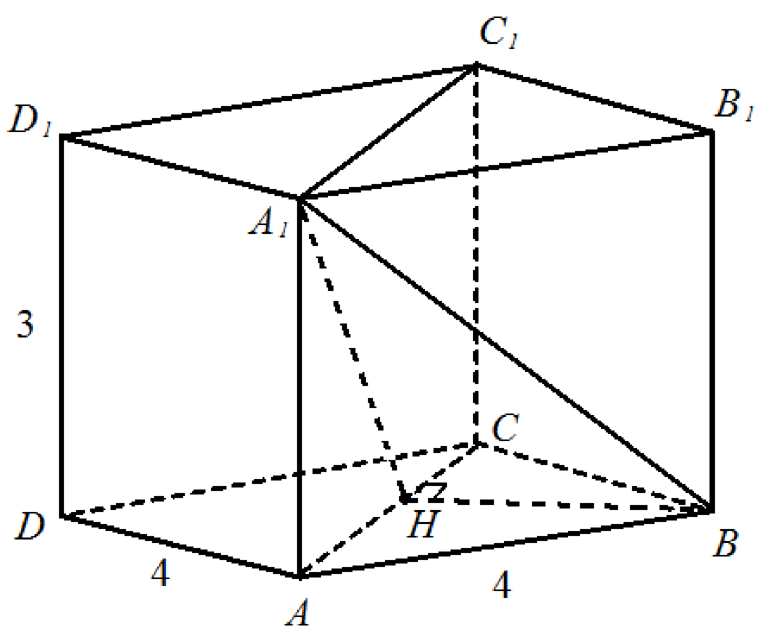
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi;\ (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + k\pi),\ n \in Z,\ k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$.
В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.
В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \dfrac{BH}{A_1B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

C3 Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$. Получаем: $\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{y^2-4y+4} = 4$; $|y+2| + |y-2| = 4$.

Учитывая, что $y \ge 0$ и поэтому $y+4>0$, получаем:

$$y+2+|y-2| = 4;\ |y-2| = 2-y.$$

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-2 \le 0$; $0 \le \sqrt{x-4} \le 2$; $4 \le x \le 8$.

Ответ: $x \in [4;8]$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{5}{6}S_{ABD} = \dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{3}S_{ABC} = \dfrac{1}{10}S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2+2x-3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2+2x-3|$.

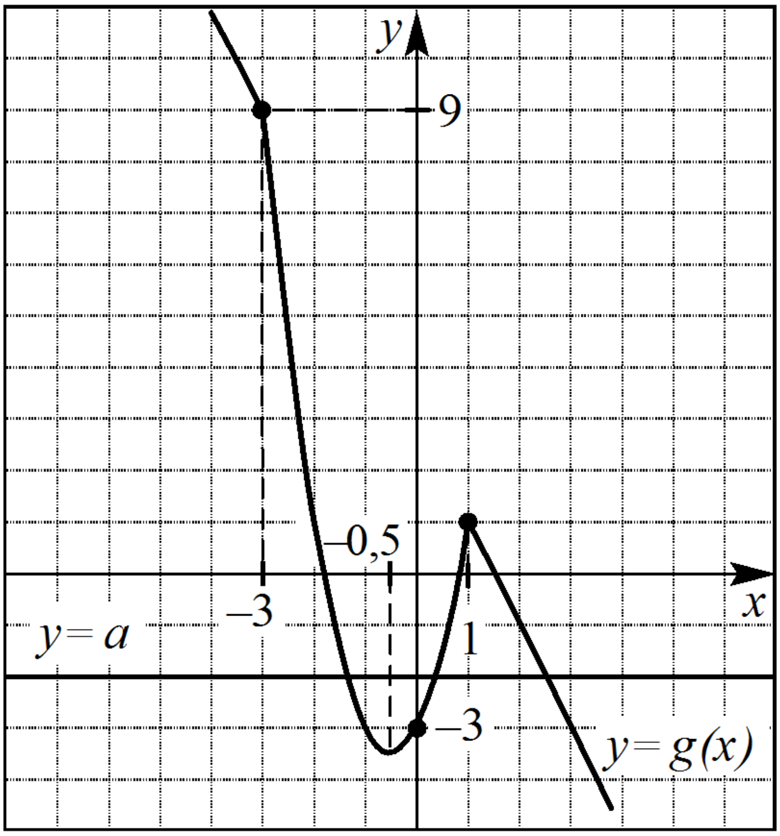


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

Если $x\le -3$ или $x\ge 1$, то $|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$, и $g(x)=-2x+3$.

Если $-3<x<1$, то $|x^2+2x-3|=-x^2-2x+3$, и $g(x)=2x^2+2x-3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2})<a<g(1)$.

$g(-\frac{1}{2})=-3{,}5;\ g(1)=1.$

Ответ: $-3{,}5<a<1$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m-3^n=1$.

При любом k число $3^{2k}+1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1}+1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n+1=2^m$, только если $m=1$ или $m=2$ (если $m\ge 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n=1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n=3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

Ответ: $m=2,\ n=1$.