

B1	B2	B3	B4	B5	B6
13	2	-4	9	14000	10,5
B7	B8	B9	B10	B11	B12
1,5	-0,5	54	40	-3	4

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, при этом из второго уравнения следует, что $x = (-1)^k$.

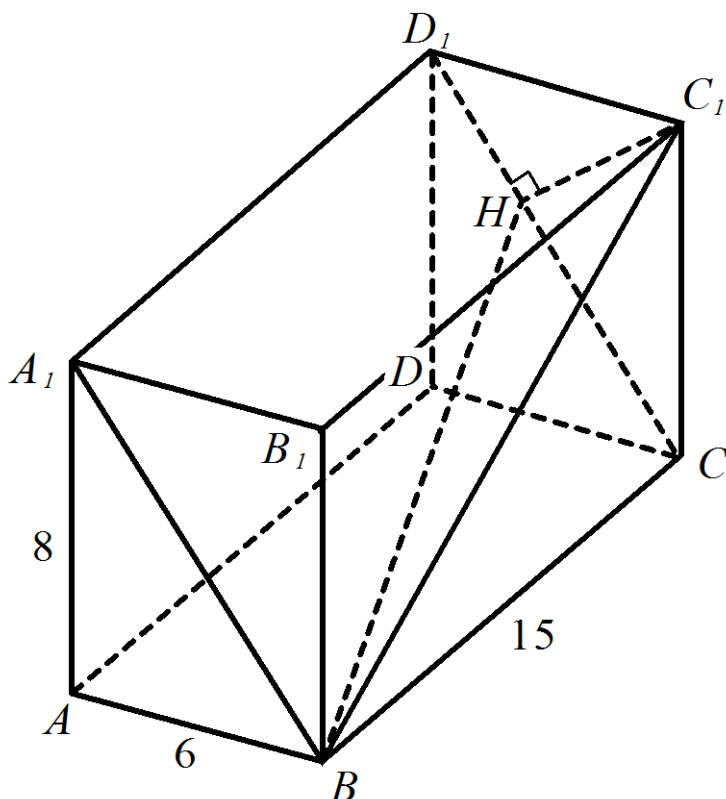
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x = 3$ или $x = -\frac{1}{2}$.

При $x = 3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x = -\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y > 0$, получаем: $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k), (-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k), k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8, AB = 6, BC = 15$.

Сечение плоскостью $A_1 BC$ есть прямоугольник $A_1 BCD_1$.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1 . BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC . Значит, нужно найти угол C_1BH .

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin \frac{24}{85}$.

C3

Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-1}$. Получаем:

$$\sqrt{y^2 + 2y + 1} - \sqrt{y^2 - 2y + 1} = 2; \quad |y+1| - |y-1| = 2.$$

Учитывая, что $y \geq 0$ и поэтому $y+1 > 0$ Преобразуем уравнение:
 $y+1 - |y-1| = 2; \quad |y-1| = y-1.$

Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1 \geq 0;$
 $\sqrt{x-1} \geq 1; \quad x \geq 2.$

Ответ: $x \geq 2$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Обозначим $BD = y$, $BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и

$$\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}, \text{ откуда } \begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases} \quad z=1,6; y=1,8,$$

$$AB = 3,6, BC = 4,8.$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{3,6^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4,8} = 0. \text{ Значит, } \angle B = 90^\circ.$$

$$\text{Тогда } ED^2 = y^2 + z^2 = 1,6^2 + 1,8^2 = 5,8.$$

Ответ: $\sqrt{5,8}$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

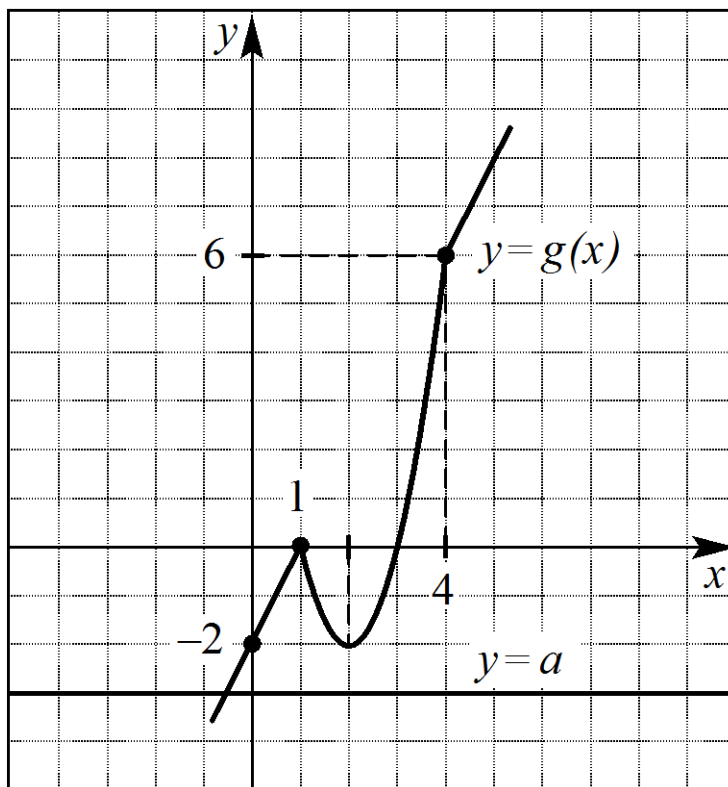


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \leq g(2)$ или $a \geq g(1)$.

$$g(2) = -2; g(1) = 0.$$

Ответ: $a \leq -2, a \geq 0$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки (3, 27, 243, ...) делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.