# Условия задач

## 8 класс

8.1. В государстве каждый житель — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все жители знакомы друг с другом. Президент однажды сделал два утверждения — «Я знаком с четным числом рыцарей» и «Я знаком с нечетным числом лжецов». Докажите, что любой другой житель сделает такие же утверждения. (Президент входит в число жителей.) *(И. Богданов)*

8.2. В произведении ДО · РЕ · МИ · СИ одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Каким наибольшим количеством нулей может заканчиваться это произведение? *(И. Рубанов)*

8.3. Назовем диагональ пятиугольника *хорошей*, если какие-то другие диагонали делят ее на 3 равные части. Какое наибольшее число *хороших* диагоналей может быть у выпуклого пятиугольника? *(И. Рубанов)*

8.4. В приборе имеется $n \geqslant 4$ контактов и $m \geqslant 4$ проводов, причем каждый провод соединяет ровно два контакта. Известно, что для любых четырех проводов найдутся такие два контакта, что любой из этих проводов подсоединен хотя бы к одному из них. Докажите, что найдутся такие три контакта, что любой провод в приборе подсоединен хотя бы к одному из них. *(В. Дольников)*

8.5. В написанном на доске выражении $\frac{AC}{B+C}$ Петя и Коля заменяют буквы тремя различными натуральными числами: вначале Петя заменяет букву $A$, затем Коля — букву $B$, затем опять Петя — букву $C$. Докажите, что Петя может писать числа так, чтобы окончательное число на доске оказалось целым. *(И. Рубанов, В. Сендеров)*

8.6. Клетки прямоугольника $7 \times 8$ покрашены в три цвета, причем в любом квадратике $2 \times 2$ есть клетки всех трех цветов. Какое наибольшее количество клеток может быть покрашено в первый цвет? *(О. Подлипский)*

8.7. Каждый день Малыш и Карлсон едят пирожные. В первый день они съели по одному пирожному. Затем Малыш каждый день съедает ровно одно пирожное, а Карлсон ровно столько, сколько они съели вместе за все предыдущие дни. Могло ли число пирожных, съеденных однажды Карлсоном, оканчиваться на 101? *(Н. Агаханов)*

8.8. На разных сторонах угла с вершиной $S$ выбраны точки $P$ и $Q$ ($SP \neq SQ$). Через середину $M$ отрезка $PQ$ проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла. Эта прямая пересекается с прямой $SP$ в точке $T$. Докажите, что перпендикуляр к $SP$, восставленный в точке $T$, и перпендикуляр к $PQ$, восставленный в точке $M$, пересекаются на биссектрисе угла. *(Л. Емельянов)*

# 9 класс

9.1. Клетки доски $8 \times 8$ раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.) *(Н. Агаханов)*

9.2. Найдите все натуральные $n$, удовлетворяющие равенству $n! = \overline{1\ldots n}$ (в правой части последовательно выписаны друг за другом десятичные записи всех натуральных чисел от 1 до $n$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$). *(В. Сендеров)*

9.3. Из точки $A$, расположенной вне окружности $\omega$, проведены две касательные $AB$ и $AC$ к этой окружности. Точка $D$ лежит на $\omega$ и диаметрально противоположна $C$. Перпендикуляр, опущенный из точки $B$ на прямую $CD$, пересекает ее в точке $H$. Докажите, что прямая $AD$ делит отрезок $BH$ пополам. *(В. Астахов)*

9.4. На острове живут 2006 человек, каждый — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Некоторые из жителей знакомы (если $A$ знаком с $B$, то и $B$ знаком с $A$). Каждый житель острова, кроме президента, сделал два утверждения — «Я знаю четное число рыцарей» и «Я знаю нечетное число лжецов». Докажите, что президент должен сделать такие же утверждения. (Президент входит в число жителей острова.) *(И. Богданов)*

9.5. Каждый день Малыш и Карлсон едят пирожные. В первый день они съели по одному пирожному. Затем Малыш каждый день съедает ровно одно пирожное, а Карлсон ровно столько, сколько они съели вместе за все предыдущие дни. Могло ли число пирожных, съеденных однажды Карлсоном, оканчиваться на 101? *(Н. Агаханов)*

9.6. На доске написаны многочлены $x+1$ и $x^2+1$. Разрешается дописывать на доску многочлен $f$, равный сумме, разности или произведению любых двух различных из написанных многочленов, если многочлен $f$ не был выписан на доске ранее. Можно ли выписать на доску многочлен $x^{2006}+1$? *(Н. Агаханов)*

9.7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ описанная окружность треугольника $ABC$ пересекает стороны $CD$ и $DA$ в точках $P$ и $Q$, а описанная окружность треугольника $CDA$ пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $R$ и $S$ соответственно. Прямые $BP$ и $BQ$ пересекают отрезок $RS$ в точках $M$ и $N$. Докажите, что точки $M$, $N$, $P$, $Q$ лежат на одной окружности. *(С. Берлов)*

9.8. Есть 15 монет, среди которых четное (не известное нам) число фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах найти хотя бы одну настоящую монету? *(С. Токарев)*

## 10 класс

10.1. Клетки доски $8 \times 8$ раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.) *(Н. Агаханов)*

10.2. Натуральные числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 50, но меньше 150. *(С. Берлов)*

10.3. Пусть $a$ и $b$ — различные натуральные числа, большие $1\,000\,000$, и такие, что $(a+b)^3$ делится на $ab$. Докажите, что $|a-b| > 10\,000$. *(И. Богданов, В. Сендеров)*

10.4. Продолжения сторон $AB$ и $CD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а продолжения сторон $BC$ и $AD$ — в точке $Q$. Обозначим через $M$ и $N$ середины диагоналей $AC$ и $BD$. Докажите, что если $\angle APM = \angle CPN$, то $\angle BQN = \angle DQM$. *(Л. Емельянов)*

10.5. Уравнение $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй — косинусом, а третий — тангенсом одного угла. Найдите все такие уравнения. *(Н. Агаханов, И. Богданов)*

10.6. На плоскости провели 8 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться? *(И. Рубанов)*

10.7. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. Окружность $\omega_1$ касается основания $BC$ в точке $M$, и продолжений сторон $AB$ и $CD$ за точки $B$ и $C$; окружность $\omega_2$ касается основания $AD$ в точке $N$, и продолжений сторон $AB$ и $CD$ за точки $A$ и $D$. Докажите, что отрезок $MN$ проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. *(Л. Емельянов)*

10.8. В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Каждая дорога соединяет только два города, и на ней введено одностороннее движение; при этом пара городов соединена не более, чем одной дорогой. Выехав из любого города, нельзя в него вернуться. Известно, что из города $A$

в город $B$ можно проехать ровно 2006 способами. Найдите минимальное возможное число городов в стране.

*(И. Богданов)*

# 11 класс

11.1. График линейной функции касается графика квадратичной функции $y = f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вниз на величину $p$. Докажите, что для всех таких $f(x)$ число $p$ одинаково. *(Н. Агаханов)*

11.2. Числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 50, но меньше 150. *(С. Берлов)*

11.3. Положительные числа $x$ и $y$ таковы, что для некоторого натурального $n$ справедливо равенство

$$x + x^2 + \ldots + x^n + y + \ldots + y^n = 2n.$$

Докажите, что тогда выполняется неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant 2.$$

*(В. Астахов, А. Гаврилюк)*

11.4. Описанная окружность четырехугольника $ABCD$ отражается симметрично относительно сторон $AB$ и $AD$. Построенные окружности вторично пересекаются в точке $A'$, отличной от $A$. Аналогично строятся точки $B'$, $C'$ и $D'$. Докажите, что четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны.

*(Л. Емельянов)*

11.5. Числа $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ являются членами некоторой бесконечной в обе стороны геометрической прогрессии $(\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots)$. Докажите, что $\operatorname{ctg} x$ также входит в эту прогрессию. *(Н. Агаханов)*

11.6. Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что все ребра пирамиды равны. *(Н. Агаханов)*

11.7. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых