Материалы для проведения

III-го этапа
XXXIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2006–2007 учебный год

Москва, 2006

Регламент проведения III этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2006/2007 учебном году

Третий (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике проводится в январе на основе методических рекомендаций Федеральной методической комиссии по математике. С целью выявления наиболее способных участников олимпиады и определения их успешности в различных разделах математики: алгебра (функции, неравенства, уравнения), арифметика и теория чисел (делимость, свойства чисел) геометрия (многоугольники, окружности, стереометрия), логика и комбинаторика (игры, принцип Дирихле, комбинаторный подсчет), олимпиада проводится в два дня. Продолжительность олимпиады в каждый день составляет 4 астрономических часа. Задания в комплекте каждого дня расположены в порядке возрастания сложности и различаются по тематике. Обязательным требованием к комплекту заданий является их новизна, включение в варианты абсолютно новых, авторских задач. С целью недопущения рассекречивания заданий, олимпиада по заданиям Федеральной методической комиссии проводится в единые для всех регионов РФ сроки — 27–28 января 20007 года. Категорически запрещено использование этих материалов ранее указанных сроков. Категорически запрещена публикация в Интернете материалов олимпиады без согласования с правообладателями на эти материалы.

Началом отсчета времени при проведении олимпиады является момент раздачи участникам листов с заданиями. В течение первого часа работы участники имеют право задавать вопросы по условиям (по трактовке тех или иных предложений), в последующем — по порядку оформления работы. В то же время, большинство участников могут быть не знакомы с порядком проведения олимпиады, либо у них могут возникнуть вопросы по условия заданий после истечения 1 часа работы. Допустимым является продление времени ответов на вопросы. Участник работает и оформляет работу на унифицированных листах, либо в тетрадях. Наиболее удобным является использование на математических олимпиадах тетрадей в клетку (12 листов). На олимпиадах запрещается пользоваться литературой, вычислительными средствами и электронными средствами связи. Участник имеет право сдать работу до окончания олимпиады. После окончания он имеет право завершить переписывание с черновика 1–2 предложений.

Участниками олимпиады являются учащиеся 8–11 классов, ставшие победителями II (районного, городского) этапа, а также победители и призеры III этапа предыдущего года. Рекомендуется проведение III этапа олимпиады в открытой форме, с включением в число участников всех желающих; либо с дополнительным включением в число участников всех обучающихся, рекомендованных школьными, городскими методическими объединениями, руководителями кружков и факультативов; либо с включением дополнительно всех победителей и призеров предварительных заочных или очных туров олимпиад. Участниками олимпиады также могут быть учащиеся младших классов, показавшие высокие результаты на предыдущих этапах олимпиады.

Победителями олимпиады — дипломантами I степени являются учащиеся, успешно справившиеся с большинством предложенных заданий, дипломантами II степени участники, выполнившие на 1–2 задание меньше, чем победители, дипломантами III степени — участники, выполнившие не менее половины всех заданий.

В исключительных случаях допускается проведение олимпиады в один день. Варианты заданий олимпиады в этом случае должны включать 5 задач по различным разделам школьной математики.

Сборник содержит материалы для проведения III-го этапа Всероссийской математической олимпиады школьников. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Агаханов, В. Астахов, А. Бадзян, И. Богданов, С. Волченков, А. Гаврилюк, А. Гарбер, Р. Гимадеев, А. Глазырин, О. Дмитриев, В. Дольников, Л. Емельянов, Г. Иванов, Р. Карасев, П. Кожевников, П. Козлов, А. Магазинов, П. Мартынов, М. Мурашкин, Д. Пермяков, О. Подлипский, И. Рубанов, В. Сендеров, М. Стебелев, Д. Терешин, В. Филимонов, Г. Челноков, К. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Общие положения

Рекомендации по оцениванию работ III-го этапа Всероссийской математической олимпиады школьников подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников в составе: Н. Агаханов, И. Богданов, А. Гарбер, П. Кожевников, О. Подлипский, И. Рубанов, В. Сендеров,

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

Проверка работ на математических олимпиадах должна проводиться в два этапа.

На первом этапе жюри производит проверку работ без выставления баллов, по так называемой системе «в плюсах и минусах». Знак выставляется в соответствии с приведенной таблицей. При этом предварительная оценка по системе «плюс — минус» может быть незначительно изменена после обсуждения критериев и классификации случаев.

Знак	Правильность (ошибочность) решения
$+$	Полное верное решение
$+.$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющее на решение.
$\pm$	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения.
$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	По задаче ничего не написано.

Иногда выставляется оценка «+!», чтобы отметить правильное красивое решение. Как правило, подобные решения отмечаются спецпризами.

По окончании первого этапа группа проверяющих по каждой задаче, анализируя и обобщая приведенные решения, выделяет различные способы решения, типичные частичные продвижения, основные ошибки. В соответствии со сравнительным анализом различных продвижений вырабатывается шкала критериев оценивания.

На втором этапе выставляются окончательные баллы по каждой задаче. В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов. В таблице приведена шкала перевода знаков в баллы.

Знак	$+$	$+.$	$\pm$	$+/2$	$\mp$	$-.$	$-$	0
Баллы	7	6–7	5–6	4	2–3	0–1	0	0

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Традиционной ошибкой школьников при решении задач на доказательство является использование доказываемого утверждения в качестве начального условия. Например, в задаче требуется доказать, что треугольник является равносторонним, а доказательство начинается со слов: «Пусть треугольник ABC — равносторонний». Подобные «решения» оцениваются в 0 баллов в силу грубой логической ошибки.

Еще раз остановимся на задачах на нахождение наибольшего (наименьшего) значения некоторой величины (задачи типа «оценка + пример»). Решение таких задач включает в себя два шага:

1. Обычно более сложный шаг (оценка) — доказательство того, что некоторая величина не больше (не меньше) некоторого значения.

2. Построение примера, показывающего достижимость указанного значения.

Как правило, только первый шаг оценивается в 4 балла, второй шаг в 1–2 балла.

В ряде заданий в особенности в задачах по геометрии, а также в задачах, в которых решающей является одна ключевая идея, нахождение которой сразу решает задачу, промежуточные оценки от 1 до 6 баллов появляются только в некоторых особых случаях. Большинство работ участников по таким заданиям оценивается в 0 или 7 баллов.

Каждая работа оценивается и проверяется (перепроверяется) не менее чем двумя членами Жюри.

Критерии оценивания работ участников третьего этапа XXXIII Всероссийской математической олимпиады школьников

Приводятся оценки за типичные продвижения в решении.

8 класс

8.1. Только ответ, без обоснования минимальности — 2 балла.

8.3. Только ответ — 0 баллов. Ответ с примером — 2 балла.

8.4. Обоснование того, что коэффициенты уравнений различны — по 1 баллу за свободные члены и коэффициенты при x.

Задача решена в предположении, что коэффициенты различны (либо без обоснования или с недостаточным обоснованием этого факта) — не менее 4 баллов.

8.5. Только ответ с приведенными правильными решениями ребуса — 3 балла.

8.6. Если приведенный в решении алгоритм позволяет находить 16 настоящих монет не при всех возможных результатах взвешиваний — 0 баллов.

8.7. Доказано, что сумма всех чисел не превосходит n — 2 балла. Доказано, что если сумма равна n, то сумма любых 13 и сумма любых 21 последовательных чисел равны соответственно 13 и 21 — еще 1 балл.

9 класс

9.1. Доказано, что двумя переворачиваниями обойтись нельзя — 3 балла.

Пример, показывающий, что трех переворачиваний достаточно — 3 балла.

9.3. Участник угадал, что искомая точка — центр вписанной окружности — 1 балл.

9.4. Получена оценка $k \geqslant 2$ — 2 балла. Приведен пример, показывающий, что $k \leqslant 2$ — 4 балла.

9.6. Если приведенный в решении алгоритм позволяет находить 16 настоящих монет не при всех возможных результатах взвешиваний — 0 баллов.

9.7. Полностью разобран один из двух случаев четности числа n — 3 балла.

10 класс

10.1. Только верный ответ без правильных обоснований — 0 баллов.

10.2. Установлено только неравенство $a \geqslant b \geqslant c$ — 3 балла.

Установлено (скажем, рассмотрением значения трехчленов в точке $x = 0$) только неравенство $c \geqslant a$ или $c \geqslant a \geqslant b$ — 3 балла.

10.3. Найдена фиксированная точка (скажем, основание биссектрисы), через которую проходит рассматриваемая прямая — 1 балл. Доказано, что если две точки X_1 и X_2 удовлетворяют условию задачи, то любая точка на отрезке (или прямой) между ними удовлетворяет условию — 4 балла.

Доказано любым верным способом, что точки лежат на одной прямой (явного описания прямой не требуется) — 7 баллов.

10.4. Одна из верных выигрышных стратегий Пети предъявлена, но не доказано, что эта стратегия действительно работает — 4 балла.

Оценка может быть ниже 4 баллов, если доказательство того, что стратегия выигрышная, очень трудное. Разбор некоторых частных случаев прохождения игры без описания общей стратегии — 0 баллов.

10.5. Верный ответ с указанием подходящего места, где встретится последовательность из 2007 подряд идущих семерок — 3 балла.

10.8. Разбор частных случаев — 0 баллов.

11 класс

11.1. Только верный ответ без правильных обоснований — 0 баллов.

11.2. Установлено только неравенство $a \geqslant b \geqslant c$ — 3 балла. Установлено (скажем, рассмотрением значения трехчленов в точке x = 0) только неравенство $c \geqslant a$ или $c \geqslant a \geqslant b$ — 3 балла.

11.3. Доказана перпендикулярность диагоналей четырехугольника в основании — 3 балла. Доказано, что из перпендикулярности диагоналей следует утверждение задачи — 2 балла.

11.5. Доказано, что достаточно решить задачу на одном из промежутков $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ — 1 балл.

Неравенство доказано только на одном из промежутков $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

11.7. Разобран только случай n, не делящихся на 3 — 2 балла.

За правильный ответ (без обоснования) при n, делящихся на 3, дополнительные баллы не начисляются.

Разбор некоторых частных случаев прохождения игры без описания общей стратегии — 0 баллов.

11.8. Только угаданный ответ — 0 баллов.

Рекомендуемые варианты заданий для проведения олимпиады в один день:

	Легкий вариант	Усложненный вариант
8 класс	8.5, 8.3, 8.2, 8.6, 8.4;	8.5, 8.2, 8.6, 8.4, 8.8.
9 класс	9.1, 9.2, 9.6, 9.3, 9.7;	9.1, 9.2, 9.7, 9.4, 9.8.
10 класс	10.1, 10.6, 10.2, 10.3, 10.4;	10.5, 10.2, 10.7, 10.3, 10.8.
11 класс	11.1, 11.2, 11.6, 11.3, 11.7;	11.1, 11.5, 11.3, 11.8, 11.4.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия задач

8 класс

8.1. Найдите наименьшее четырехзначное число такое, что произведение его цифр, увеличенных на 1, равно 21. (*И. Рубанов*)

8.2. Докажите, что если точка, которая делит одну из сторон треугольника в отношении $1:3$, равноудалена от середин двух других сторон, то треугольник — прямоугольный. (*Н. Агаханов*)

8.3. При каком наименьшем n на шахматную доску можно поставить n ладей и n слонов так, чтобы любая ладья била хотя бы двух слонов, а любой слон бил хотя бы две ладьи? (*М. Мурашкин*)

8.4. На координатной плоскости проведено 20 прямых — графиков линейных функций $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $\ldots$, $y = k_{20}x + b_{20}$, где каждый из коэффициентов $k_1, k_2, \ldots, k_{20}, b_1, b_2, \ldots, b_{20}$ равен одному из чисел $1, 2, \ldots, 20$. Известно, что любые две прямые пересекаются в точке, не лежащей на оси ординат, но никакие три не проходят через одну точку. Отмечены точки пересечения всех пар прямых. Докажите, что модуль произведения абсцисс всех отмеченных точек равен 1. (*И. Рубанов*)

8.5. Сколько решений имеет числовой ребус

$$\overline{ABA} \cdot \overline{AA} = \overline{AB} \cdot \overline{AAA} - A,$$

где A и B — различные цифры, $A \neq 0$? (*М. Мурашкин*)

8.6. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивых — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет? (*О. Дмитриев*)

8.7. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, H — точка их пересечения. Через точку, симметричную середине отрезка BH относительно прямой BC, провели прямую, перпендикулярную стороне AC. Докажите, что она пересекает прямую BC в точке A_1. (*Л. Емельянов*)

8.8. По кругу расставлены $n > 2007$ чисел, не все из которых равны. Известно, что сумма любых 13 стоящих подряд чисел не превосходит 13, а сумма любых 21 стоящих подряд чисел не превосходит 21. Докажите, что сумма всех чисел строго меньше n. (*В. Дольников*)

9 класс

9.1. На столе лежат семь карточек. За один ход разрешается перевернуть любые пять карточек. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки? (*Л. Емельянов*)

9.2. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 2007 раз больше корней квадратного уравнения $cx^2 + dx + a = 0$. Докажите, что $b^2 = d^2$. (*Н. Агаханов*)

9.3. На стороне AC треугольника ABC взята точка B_1. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника. Окружность, описанная около треугольника AB_1I, вторично пересекает сторону AB в точке C_1. Окружность, описанная около треугольника CB_1I, вторично пересекает сторону BC в точке A_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ не зависит от положения точки B_1 на стороне AC. (*Т. Емельянова*)

9.4. В стране 20 городов. Авиакомпания хочет организовать двусторонние рейсы между ними так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой не более, чем за k пересадок. При этом количество авиалиний из любого города не должно превышать четырех. При каком наименьшем k это возможно? (*П. Мартынов*)

9.5. В наборе из пяти палочек ни из каких трех палочек нельзя составить треугольник. Могло ли так оказаться, что, разломав одну из палочек на две, мы получим шесть палочек, из которых можно составить два равнобедренных треугольника? (*С. Волченков*)

9.6. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивых — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет? (*О. Дмитриев*)

9.7. Пусть каждое из натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя. (*В. Сендеров*)

9.8. Около треугольника ABC описана окружность. Пусть A_0 и C_0 — соответственно середины ее дуг BC и AB, не содержащих вершин A и C. Оказалось, что отрезок A_0C_0 касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите угол B. (*В. Филимонов*)

10 класс

10.1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, …, ровно семь — на 2? (*М. Мурашкин*)

10.2. Даны числа a, b, c. Известно, что для любого x выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$. (*И. Богданов*)

10.3. Дан треугольник ABC. Через точку X, лежащую внутри него, проводятся отрезок c_X, параллельный AB, с концами на сторонах AC и BC, и отрезок b_X, параллельный AC, с концами на сторонах AB и CB. Докажите, что все точки X, для которых длины отрезков b_X и c_X равны, лежат на одной прямой. (*Л. Емельянов*)

10.4. На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{99\text{ единиц}}$. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За ход игрок либо записывает ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стирает один из нулей. Проигрывает тот, после чьего хода на доске в первый раз появится число, делящееся на 11. Кто выигрывает при правильной игре? (*М. Мурашкин*)

10.5. В строку выписываются друг за другом без пробелов все натуральные числа в порядке возрастания: 1234567891011…. Какая из последовательностей цифр встретится в строке раньше: последовательность ровно из 2006 подряд идущих шестерок (слева и справа от которой стоят не шестерки) или последовательность ровно из 2007 семерок (слева и справа от которой стоят не семерки)? (*М. Мурашкин*)

10.6. Пусть AB и CD — две перпендикулярные хорды окружности с центром O, пересекающиеся в точке E; пусть также N и T — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ENOT$ — параллелограмм. (*В. Филимонов*)

10.7. На доске написаны натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 10$. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, если числа a и b уже записаны. Можно ли с помощью таких операций получить число 1000000? (*А. Голованов*)

10.8. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых n дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на n округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов. (*В. Астахов*)

11 класс

11.1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, ..., ровно семь — на 2? (*М. Мурашкин*)

11.2. Даны числа a, b, c. Известно, что для любого x выполнено неравенство

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$. (*И. Богданов*)

11.3. Боковое ребро четырехугольной пирамиды назовем *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведенные в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковых ребра — хорошие, то четвертое боковое ребро также является хорошим. (*Н. Агаханов*)

11.4. В стране n городов, некоторые пары из которых соединены непересекающимися дорогами. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до любого другого, причем единственным способом (если не проезжать по одной дороге более одного раза). Докажите, что министр может объявить не более, чем $\frac{n}{51}$ городов закрытыми (и запретить въезд в них и выезд из них) так, чтобы после этого для любой пары городов X, Y выполнялось одно из двух условий: либо из X нельзя добраться до Y, либо из X можно добраться до Y, проехав не более, чем по 49 дорогам. (*В. Дольников*)

11.5. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2.$$

(*Н. Агаханов*)

11.6. Пусть AB и CD — две перпендикулярные хорды окружности с центром O, пересекающиеся в точке E; пусть также N и T — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ENOT$ — параллелограмм. (*В. Филимонов*)

11.7. На клетчатой полоске $1 \times n$ двое играют в следующую игру. Каждым своим ходом первый игрок закрашивает одну незакрашенную клетку, а второй — две рядом стоящие незакрашенные. Если игрок не может сделать хода — он выиграл. Кто выиграет при правильной игре? (*И. Богданов, М. Исаев*)

11.8. Найдите все четверки целых чисел (x, y, z, t) таких, что их сумма равна 0, а число $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ является квадратом целого числа. (*В. Сендеров*)

Решения задач

8 класс

8.1. **Ответ.** 2006.

$21 = 3 \cdot 7$, значит, в получившемся произведении могут встречаться только цифры 3, 7 и два раза 1. Поэтому в исходном числе были цифры 2, 6 и два раза 0. Так как число не может начинаться с 0, то, чтобы быть минимальным, оно должно начинаться с 2. А из чисел 2600, 2060 и 2006 наименьшим является 2006.

8.2. Пусть M и N — середины сторон AC и AB треугольника ABC, K — точка на стороне BC такая, что $CK : KB = 1 : 3$, причем $MK = NK$ (см. рис. 1). Покажем, что $\angle ACB = 90^\circ$.

Соединим точки M и N и проведем в равнобедренном треугольнике MKN высоту KP. Она является медианой этого треугольника, поэтому $MP = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}CB$ (последнее — из того, что MN — средняя линия треугольника ABC). Таким образом, $MP = KC$. Кроме того, $MN \parallel CB$, поэтому $\angle PMK = \angle MKC$, и треугольники PMK и CKM равны по двум сторонам ($MP = KC$, MK — общая) и углу между ними. Тогда $\angle MCK = \angle KPM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

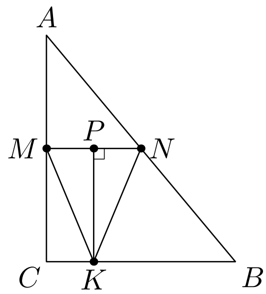

Рис. 1

8.3. **Ответ.** $n = 4$.

Назовем пару "ладья–слон" *ладейной*, если в ней ладья бьет слона, и *слоновой*, если в ней слон бьет ладью. Заметим, что слон и ладья не могут бить друг друга, поэтому пара не может являться одновременно слоновой и ладейной. По условию, ладейных пар не меньше $2n$, и слоновых тоже не меньше $2n$. С другой стороны, общее количество пар "ладья-слон" равно n^2. Поэтому $2n + 2n \leqslant n^2$, откуда $n \geqslant 4$.

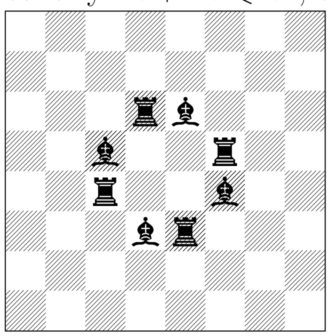
Рис. 2

В случае $n = 4$ искомая расстановка ладей и слонов существует (см. рис. 2).

8.4. Если для некоторой пары различных m и n коэффициенты b_m и b_n равны, то прямые $y = k_m x + b_m$ и $y = k_n x + b_n$ пересекаются на оси ординат, что противоречит условию. Следовательно, никакие два коэффициента из набора $\{b_1, b_2, \ldots, b_{20}\}$ не равны, поэтому каждое из чисел $1, 2, \ldots, 20$ встречается в наборе $\{b_1, b_2, \ldots, b_{20}\}$ ровно по разу.

Так как никакие две прямые не параллельны, то никакие два коэффициента из набора $\{k_1, k_2, \ldots, k_{20}\}$ не равны, значит каждое из чисел $1, 2, \ldots, 20$ встречается в наборе $\{k_1, k_2, \ldots, k_{20}\}$ ровно по разу.

Вычислим абсциссу точки пересечения прямых $y = k_m x + b_m$ и $y = k_n x + b_n$ ($m \neq n$): $x_{mn} = \dfrac{b_m - b_n}{k_n - k_m}$. Отсюда вытекает, что произведение Π всех чисел x_{mn} равно дроби, числитель которой равен произведению всех попарных разностей чисел $1, 2, \ldots, 20$. В знаменателе дроби находится то же самое произведение разностей (возможно, соответствующие разности в числителе и знаменателе отличаются знаком). Отсюда и следует, что П равно $+1$ или -1.

8.5. **Ответ.** 8.

Перепишем левую часть равенства как $\overline{ABA}\cdot\overline{AA} = (101A+10B)\cdot 11A = 1111A^2 + 110AB$, а правую — как $\overline{AB}\cdot\overline{AAA} - A = (10A+B)\cdot 111A - A = 1110A^2 + 111AB - A$, откуда $A^2 = AB - A$. Поделив на $A \neq 0$, получим $A = B - 1$. Так как $B \leqslant 9$, то решение существует для каждого $A = 1, 2, \ldots, 8$.

8.6. **Первое решение.** Разделим все монеты на две части по 20 монет и взвесим. Так как фальшивых монет нечетное число, то одна из кучек перевесит. Значит, в ней не более одной фальшивой монеты. Разделим её на две кучки по 10 монет и взвесим их. Если чашки весов оказались в равновесии, то все 20 взвешиваемых монет — настоящие. Если одна из чашек перевесила, то на ней 10 настоящих монет, а среди других 10 монет ровно одна фальшивая. Разделим эти 10 монет на три кучки, состоящих из 4, 4 и 2 монет. Третьим взвешиванием сравним две кучки по 4 монеты. Если они уравновесятся, то все 8 монет — настоящие и мы нашли 18 настоящих монет. Если одна из кучек перевесит, то в ней 4 настоящих монеты, в другой кучке есть фальшивая, а 2 отложенных монеты — настоящие. Всего найдено 16 настоящих монет.

Второе решение. Разделим все монеты на пять равных кучек, в каждой из которых по 8 монет, и пронумеруем их. Положим на одну чашку весов 1-ю и 2-ю кучки, а на другую — 3-ю и 4-ю.

Рассмотрим первый случай — весы уравновесились. Тогда либо на каждой чашке находится по одной фальшивой монете, либо все монеты во взвешивании настоящие. Тогда возьмем и взвесим 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет настоящие. Если одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет. Третьим взвешиванием сравниваем 3-ю и 4-ю кучки и определяем следующие 8 настоящих монет.

Теперь рассмотрим второй случай — весы не уравновесились. Пусть для определенности перевесили 1-я и 2-я кучки, тогда среди них не более одной фальшивой монеты. Вторым взвешиванием сравним 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет — настоящие. Если одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет, а в другой ровно одна фальшивая. Следовательно, в 3-й и 4-й кучках ровно две фальшивые монеты, а в 5-й кучке 8 настоящих монет. Значит, всего найдено 16 настоящих монет.

8.7. **Первое решение.** Обозначим середину отрезка BH через K, а точку, симметричную ей относительно BC, через L (см. рис. 3). Так как KL и HA_1 перпендикулярны BC, то KL параллельна HA_1, а в силу того, что K — середина BH, KL содержит среднюю линию треугольника BHA_1. Значит, в четырехугольнике BLA_1K диагонали BA_1 и KL делятся пополам точкой их пересечения. Тогда BLA_1K — параллелограмм, и $LA_1 \parallel BK$, а следовательно, $LA_1 \perp AC$. Значит, перпендикуляр к AC, проведенный через точку L, и есть LA_1.

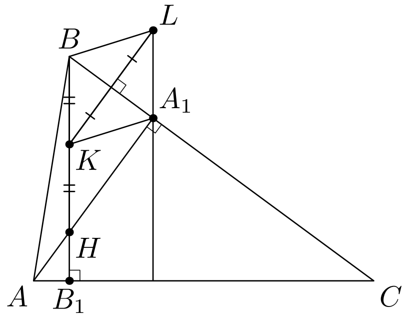

Рис. 3

Второе решение. Обозначим середину отрезка BH через K, а точку, симметричную ей относительно BC, через L. Так как A_1K — медиана прямоугольного треугольника BA_1H, то $KA_1 = KB$, откуда $\angle KBA_1 = \angle KA_1B$. В силу симметрии точек K и L относительно прямой BA_1, $\angle BA_1K = \angle LA_1B$. Значит, $\angle B_1BA_1 = \angle BA_1K = \angle BA_1L$, откуда следует параллельность прямых BB_1 и LA_1, или перпендикулярность LA_1 и AC.

8.8. Пусть по окружности расставлены числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Каждое слагаемое в сумме $T = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{13}) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{14}) + \ldots + (a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{12})$ не превосходит 13, и каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входит в эту сумму 13 раз. Поэтому $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = T/13 \leqslant n$.

Для решения задачи теперь достаточно доказать, что если $S = n$, то все числа равны 1. Будем говорить, что для расставленных чисел выполнено $C(k)$, если сумма любых k подряд идущих чисел равна k. Если $S = n$, то каждая скобка в сумме T равна 13, т. е. выполнено условие $C(13)$. Аналогично, если $S = n$, то выполнено условие $C(21)$.

Заметим, что если при натуральных $a > b$ выполняются условия $C(a)$ и $C(b)$, то выполняется и условие $C(a - b)$. Действительно, возьмем любые $a - b$ подряд идущих чисел и следующие за ними b чисел. Сумма b чисел равна b, а сумма всех этих a чисел равна a, значит, сумма данных $a - b$ чисел равна $a - b$.

Значит, из условий $C(21)$ и $C(13)$ последовательно выводим условия $C(21 - 13) = C(8)$, $C(13 - 8) = C(5)$, $C(8 - 5) = C(3)$, $C(5 - 3) = C(2)$, $C(3 - 2) = C(1)$. Но условие $C(1)$ и означает, что все числа на окружности равны 1.

9 класс

9.1. **Ответ.** 3 хода.

Очевидно, что одного хода не хватит. После двух ходов найдутся по крайней мере три карточки, перевернутые по два раза, а значит, эти карточки будут в исходном положении.

Приведем пример переворачивания всех карточек за три хода. Пронумеруем карточки цифрами от 1 до 7 и перевернем за первый ход карточки с номерами 1,2,3,4,5, за второй ход — 1,3,4,5,6, а за третий ход — 1,3,4,5,7.

9.2. Пусть x_1, x_2 - корни второго уравнения, $n = 2007$, тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c}$, $x_1x_2 = \frac{a}{c}$, $nx_1 + nx_2 = -\frac{b}{a}$, $nx_1nx_2 = \frac{c}{a}$, т. е. $\frac{dn}{c} = -n(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}$, $\frac{n^2a}{c} = n^2x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Из второго равенства получаем $n^2 = \frac{c^2}{a^2}$, а из первого $\frac{d^2n^2}{c^2} = \frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2}\frac{c^2}{a^2} = \frac{d^2}{a^2}$, значит, $b^2 = d^2$.

З а м е ч а н и е. Ясно, что числа $\frac{d}{c}$ и $\frac{b}{a}$ имеют одинаковые знаки — они различаются в 2007 раз. Поэтому, если знаки a и c совпадают, то $b = d$, иначе $b = -d$; оба случая возможны.

9.3. Заметим, что AI — биссектриса угла BAC. Из равенства углов C_1AI и B_1AI следует равенство хорд C_1I и B_1I. Аналогично, $B_1I = A_1I$ (см. рис. 4). Значит, точка I является центром описанной окружности для всех треугольников $A_1B_1C_1$.

9.4. **Ответ.** $k = 2$.

Заметим, что потребуется сделать не менее двух пересадок. Действительно, из произвольного города A без пересадок можно добраться не более чем в 4 города, а ровно с одной пересадкой — не более, чем в $4 \cdot 3 = 12$ городов (так как один из рейсов ведет из каждого из этих городов в A). Итак, если использовать не более одной пересадки, то из любого города можно долететь не более чем в 16 других городов, а требуется

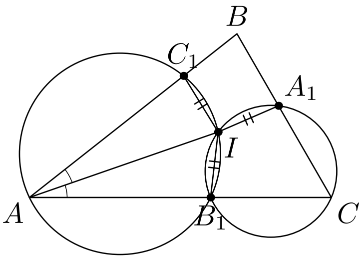

Рис. 4

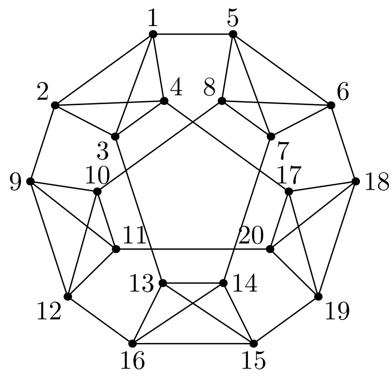

Рис. 5

— в 19. На рис. 5 показано, как можно организовать рейсы, чтобы было не более двух пересадок. Картинка симметрична, поэтому достаточно показать, как можно добраться из первого города в любой другой. Из него без пересадок можно добраться до городов 2, 3, 4, 5. Затем с одной пересадкой в города 6, 7, 8 (из 5), 9(из 2), 13 (из 3) и 17 (из 4). И с двумя пересадками — в города 10, 11, 12 (из 9), в 14, 15, 16 (из 13), в 18, 19, 20 (из 17).

9.5. **Ответ.** Могло.

Например, подойдет набор палочек с длинами 1, 1, 2, 3, 5. Разломив палочку длины 5 на две палочки длиной 2 и 3, мы сможем составить два равнобедренных треугольника со сторонами 1, 2, 2 и 1, 3, 3.

9.6. См. решение задачи 8.6.

9.7. Предположим противное: n делится ровно на вторую степень каждого своего простого делителя. Тогда $n = k^2$, где k — произведение всех простых делителей p. Следовательно, достаточно доказать, что n не может являться точным квадратом.

Предположим противное: $n = m^2$, где m — натуральное. Если n четно, то $n + 2$ также четно, и одно из них не делится на 4, что противоречит условию.

Если n нечетно, то и m нечетно, $m = 2k-1$. Тогда $n+1 = (2k-1)^2+1 = 4(k^2-k)+2$ — делится на 2, но не делится на 4, что опять противоречит условию.

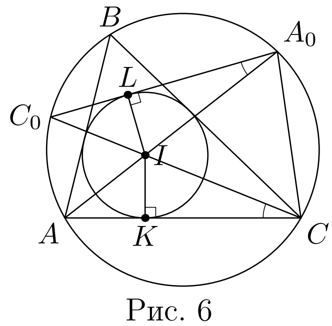

Рис. 6

9.8. Обозначим вписанную окружность треугольника ABC через ω, её центр — через I, точки касания ω с AC и A_0C_0 — через K и L соответственно. Тогда в треугольниках IKC и ILA_0 углы IKC и ILA_0 — прямые (как углы между радиусом и касательной), и $IK = IL$, так как оба этих отрезка — радиусы ω (см. рис. 6). Также, поскольку точки A, I, A_0 лежат на биссектрисе угла A, а точки C, I, C_0 — на биссектрисе угла C, то $\angle ICK = \angle C_0CA = \angle C_0A_0A = \angle LA_0I$ (т.к. углы $\angle C_0A_0A$ и $\angle C_0CA$ опираются на одну дугу описанной окружности C_0A). Поэтому прямоугольные треугольники IKC и ILA_0 равны по катету и острому углу, следовательно, $IA_0 = IC$, то есть треугольник IA_0C — равнобедренный. Далее $\angle A_0IC = \frac{1}{2}(\overparen{AC_0} + \overparen{A_0C}) = \frac{1}{2}(\overparen{C_0B} + \overparen{A_0B}) = \frac{1}{2}\overparen{A_0BC_0} =$ $= \angle A_0CC_0 \Rightarrow \angle A_0IC = \angle A_0CI \Rightarrow A_0I = A_0C$. Значит, $\triangle A_0IC$ — равносторонний. Отсюда $\angle ABC = \angle AA_0C = 60^\circ$.

З а м е ч а н и е. Если рассмотреть произвольный треугольник ABC, в котором $\angle B = 60^\circ$, то для него отрезок A_0C_0 касается ω. Действительно, проведя все рассуждения в обратном порядке (приняв за L проекцию I на A_0C_0), получаем равенство треугольников IKC и ILA_0 по гипотенузе и острому углу, из которого следует, что $IK = IL$, поэтому L лежит на ω, и, следовательно, A_0C_0 касается ω.

10 класс

10.1. **Ответ.** Не существуют.

Предположим, что такие восемь чисел найдутся. Из условия следует, что ровно одно из них не делится на 2 и ровно два из них не делятся на 3. Значит, среди рассматриваемых чисел не менее пяти чисел делятся и на 2, и на 3, т. е. делятся на 6. Но по условию чисел, делящихся на 6, должно быть ровно три. Противоречие.

10.2. Из неравенства получаем, что трехчлены $(ax^2+bx+c)-(bx^2+cx+a)$ и $(bx^2+cx+a)-(cx^2+ax+b)$ принимают неотрицательные значения при всех значениях x; отсюда следует, что их старшие коэффициенты $a-b$ и $b-c$ неотрицательны, т. е. $a \geqslant b \geqslant c$.

С другой стороны, подставив в исходные неравенства $x=0$, получаем $c \geqslant a \geqslant b$, откуда $a \geqslant b \geqslant c \geqslant a$, что возможно лишь в случае равенства всех трех коэффициентов.

10.3. Через основание A_1 биссектрисы угла BAC проведем прямые, параллельные AC и AB, пересекающие соответственно AB и AC в точках P и Q. По построению APA_1Q — параллелограмм, диагональ AA_1 которого является биссектрисой, значит, APA_1Q — ромб, откуда $A_1P = A_1Q$.

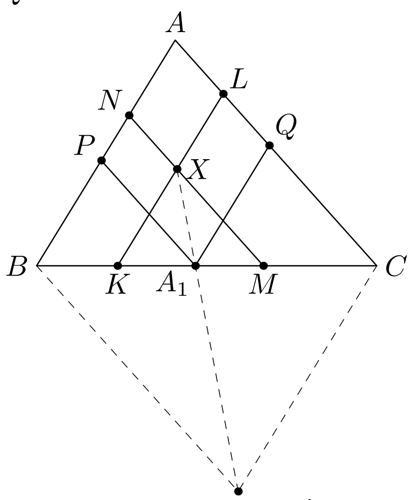

Рис. 7

Рассмотрим некоторую точку X, лежащую внутри треугольника ABC, для которой длины отрезков b_X и c_X равны. Обозначим через K, L, M, N концы отрезков b_X и c_X (см. рис. 7). Каждый из треугольников PBA_1, NBM, QA_1C, LKC подобен треугольнику ABC. Из подобия и равенств $KL = MN$ и $PA_1 = QA_1$ вытекает: $\frac{BM}{BA_1} = \frac{NM}{PA_1} = \frac{LK}{QA_1} = \frac{CK}{CA_1}$. (Заметим, что $\frac{BM}{BA_1} = \frac{CK}{CA_1} > 1$, иначе X не лежит внутри треугольника ABC.) Далее, $\frac{BM}{BA_1} = \frac{BA_1 + A_1M}{BA_1} = 1 + \frac{A_1M}{BA_1}$, $\frac{CK}{CA_1} = \frac{CA_1 + A_1K}{CA_1} = 1 + \frac{A_1K}{CA_1}$, отсюда $\frac{A_1M}{BA_1} = \frac{A_1K}{CA_1}$.

Проведем через B прямую, параллельную AC, до пересечения с прямой XA_1 в точке R. Также проведем через C прямую, параллельную AB, до пересечения с прямой XA_1 в точке S. Из подобия треугольников A_1MX и A_1BR, а также треугольников A_1KX и A_1CS вытекает, что $\frac{A_1X}{RA_1} = \frac{A_1M}{BA_1} = \frac{A_1K}{CA_1} = \frac{A_1X}{SA_1}$. Отсюда $RA_1 = SA_1$, значит S и R совпадают с такой точкой A', что $ABA'C$ — параллелограмм. Получаем, что X лежит на фиксированной прямой A_1A'.

10.4. **Ответ.** Петя.

Заметим, что число $A_n = 10\underbrace{11\ldots11}_{n \text{ единиц}}$ не делится на 11. Действительно, если n

четно, то $A_n = 1\underbrace{000\ldots00}_{n+1\text{ нулей}} + \underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$, а если n нечетно, то $A_n = 9\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ нулей}} + \underbrace{111\ldots11}_{n+1\text{ единица}}$. В обоих случаях второе слагаемое делится на 11, а первое — нет.

Поскольку с каждым ходом число на доске уменьшается, рано или поздно один из игроков проиграет. Предъявим беспроигрышную стратегию для Пети, действуя по которой, он сможет после каждого своего хода получать число вида A_n. Первым ходом Петя заменит вторую слева единицу на ноль, а в дальнейшем либо стирает ноль, появившийся на предыдущем ходе Васи (т. е. число вида A_m), либо, если тот стер единственный ноль, опять заменяет вторую слева единицу на ноль. Если Петя не может сделать последнего действия, то перед ним число 11, т. е. Вася уже проиграл на предыдущем ходу.

10.5. **Ответ.** Последовательность ровно из 2007 семерок.

Последовательность из ровно 2007 семерок появится, например, при выписывании чисел $N = \underbrace{777\ldots77}_{1004\text{ семерки}}$ и $N+1 = \underbrace{777\ldots7}_{1003\text{ семерки}}8$, так как числу N предшествует цифра 6.

Предположим, что последовательность p из 2006 подряд идущих шестерок встретилась раньше числа числа N. Подчеркнем в строке у каждого из чисел $1, 2, \ldots, N-1, N$ последнюю цифру. Между ближайшими подчеркнутыми цифрами не более 1003 цифр (так как N — 1004-значное), поэтому в p есть подчеркнутая шестерка (т. е. последняя цифра некоторого числа M), причем ровно одна, так как ближайшие к ней подчеркнутые цифры — 5 и 7: $\ldots\underline{5}\underbrace{\ldots\ldots\underline{6}}_{M}\underbrace{\ldots\ldots\underline{7}}_{M+1}\ldots$. В M и $M+1$ соответствующие цифры, кроме последних, равны. Поэтому количество шестерок между $\underline{5}$ и $\underline{7}$ — нечетное число, не превосходящее $2\cdot 1003+1 = 2007$, т. е. между $\underline{5}$ и $\underline{7}$ либо 2007 шестерок подряд, либо не более 2005 шестерок. Противоречие.

10.6. Продолжим TE до пересечения с прямой AC в точке K (см. рис. 8). Покажем, что EK — высота треугольника CEA. Пусть $\angle CAB = \alpha$. Из прямоугольного треугольника AEC получаем $\angle ACE = 90^\circ - \alpha$. Далее, $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу), С другой стороны, ET — медиана в прямоугольном $\triangle BED$, поэтому $ET = DT$ и $\angle TED = \angle TDE = \alpha$, и $\angle KEC = \alpha$ как вертикальный с $\angle TED$. Отсюда получаем $\angle EKC = 180^\circ - \angle KEC - \angle KCE = 90^\circ$.

Таким образом, $TE \perp AC$ и $ON \perp AC$ (так как N — середина AC), откуда $TE \parallel ON$. Аналогично $OT \parallel EN$, что и требовалось.

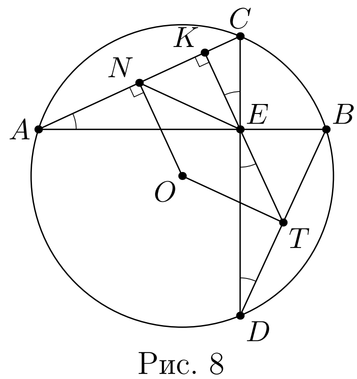

Рис. 8

Замечание. Утверждение задачи остается в силе и в том случае, если в точке E пересекаются не сами хорды AB и CD, а их продолжения. Доказательство в этом случае полностью аналогично изложенному.

10.7. **Ответ.** Нельзя.

Обозначим через $q(n)$ такое наибольшее целое число k, что n делится на 5^k. Для каждого n из начального набора чисел $q(n) = 0$ или $q(n) = 1 = 2^0$. Заметим, что $q(a^2) = 2q(a)$, а $q(\text{НОК}(a, b))$ равно $q(a)$ или $q(b)$. Отсюда вытекает, что для чисел n, выписанных в любой момент на доске, число $q(n)$ является целой степенью двойки или равно 0.

Число 1000000 не могло быть выписано, поскольку $q(1000000) = 6$.

10.8. На первом шаге отметим некоторые два города Y_1 и Z_1, соединенные дорогой. Далее, на очередном i-м шаге среди еще не отмеченных городов выбираем два города Y_i и Z_i, соединенные дорогой, и отметим их. Действуем так, пока это возможно. В конце концов получим такие различные отмеченные города Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, $\ldots$, Y_k, Z_k, что города с одинаковым номером соединены дорогой, и среди неотмеченных городов нет двух, соединенных дорогой. Из условия следует, что $k \leqslant n-1$.

Обозначим через A_i множество городов, которые связаны дорогой с Z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (в частности, $Y_i \in A_i$). В множество A_{k+1} включим все города, не вошедшие в A_1, A_2, …, A_k.

Покажем, что никакие два города из одного множества A_i не соединены дорогой. Отсюда легко будет получить требуемое разбиение на округа K_1, K_2, …, K_n: для данного города X найдем такой наименьший номер i, что $X \in A_i$, и отнесем X к округу K_i. (В некоторых округах, возможно, не будет городов.)

Если в множестве A_i ($i \leqslant k$) нашлись два города U и V, соединенные дорогой, то города U, V и Z_i попарно соединены, что невозможно. Предположим, что два города U и V из A_{k+1} соединены дорогой. Тогда один из городов U, V (скажем, U) отмеченный, иначе на $(k+1)$-м шаге можно было отметить U и V. Если $U = Y_i$ для некоторого $i \leqslant k$, то $U \in A_i$. Если же $U = Z_i$ для некоторого $i \leqslant k$, то $V \in A_i$. В любом случае получаем противоречие с тем, что U и V — города из A_{k+1}.

11 класс

11.1. **Ответ.** Не существуют.

См. решение задачи 10.1.

11.2. См. решение задачи 10.2.

11.3. Обозначим через A', B', C', D' середины боковых ребер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$ соответственно (см. рис. 9). Пусть для определенности, ребра SB, SC и SD — хорошие, т. е. $AB' = CB'$, $BC' = DC'$, $CD' = AD'$. Геометрическое место точек, равноудаленных от A и C — плоскость, перпендикулярная отрезку AC (и проходящая через его середину). Точки B' и D' лежат в этой плоскости, поэтому $B'D' \perp AC$. Так как $B'D'$ — средняя линия треугольника SBD, то $BD \parallel B'D'$, откуда $BD \perp AC$.

Так как $A'C'$ — средняя линия треугольника SAC, то $AC \parallel A'C'$, откуда $BD \perp A'C'$, значит A' лежит в плоскости, перпендикулярной BD и проходящей через C'. Так как $BC' = DC'$, то эта плоскость является геометрическим местом точек, равноудаленных от B и D. Отсюда $BA' = DA'$, т. е. SA — хорошее ребро.

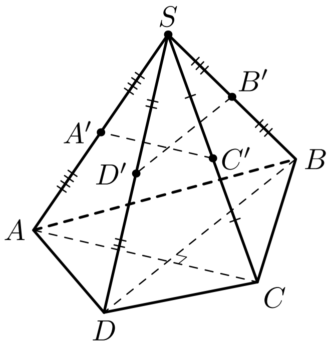

Рис. 9

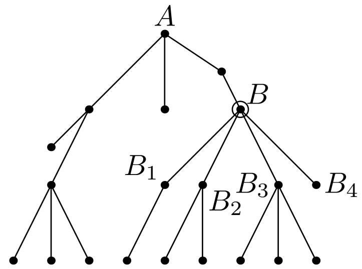

Рис. 10

11.4. Применим индукцию по n. При $n \leqslant 50$ утверждение верно. Докажем утверждение для некоторого $n \geqslant 51$, предполагая, что оно верно для $1, 2, \ldots, n-1$.

Для каждой пары городов X, Y обозначим через $p(X, Y)$ единственный путь от X до Y, в котором ни одна дорога не пройдена дважды. Зафиксируем город A (столицу) (см. рис. 10). Для каждого города C путь $p(A, C)$ содержит A, C и некоторое количество промежуточных городов (в частности, $p(A, A)$ содержит только A). Если город C входит в путь $p(A, D)$, то будем говорить, что D *подчинен* C (в частности, C подчинен самому себе, а все города подчинены A). Если D подчинен C и, кроме этого, имеется дорога из D в C, то скажем, что D — *пригород* города C.

Среди всех городов, у которых не меньше 51 подчиненных (таков, например, город A), рассмотрим город B с наименьшим количеством l подчиненных. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_l$ — все пригороды города B; у каждого B_i подчиненных меньше, чем у B, поэтому их не больше 50 (иначе получилось бы противоречие с выбором B).

Сделаем город B закрытым. После этого из города X, подчиненного B_i, нельзя добраться до города Y, не подчиненного B_i, так как иначе путь $p(X,Y)$ проходил бы через B. Если же города X и Y подчинены B_i, то путь $p(X,Y)$ содержит только города, подчиненные B_i, и в нем не более 49 дорог. Далее, к множеству городов, не подчиненных B (таких городов не более $n-51$, и любые два из них по-прежнему соединены путем), можно применить предположение индукции и закрыть не более $\frac{n-51}{51}$ городов, чтобы выполнялось условие задачи. Итого закрыто не более $\frac{n-51}{51} + 1 = \frac{n}{51}$ городов, и все условия выполнены.

11.5. Пусть $a \in (0, \frac{\pi}{4}]$, $b \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ и $a+b=\frac{\pi}{2}$. Тогда $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$, $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$. Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для $x=a$, то оно выполняется и для $x=b$; поэтому достаточно доказать неравенство для $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$.

Если $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$, то $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$, $\cos x \geqslant \sin x$, поэтому

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$$

для положительного A. Но $A + \frac{1}{A} = (\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}})^2 + 2 \geqslant 2$.

11.6. См. решение задачи 10.6.

11.7. **Ответ.** При n, делящихся на 3, выигрывает первый; при всех остальных n — второй.

Заметим, что после ходов первого и второго игроков количество закрашенных клеток увеличивается на 3. Поэтому после хода второго оно всегда кратно трем.

Пусть n не кратно трем. Тогда второй может ходить, как ему заблагорассудится. Предположим, что после очередного хода второго первый не может сделать хода. Тогда все клетки закрашены. Это противоречит тому, что количество закрашенных клеток кратно трем. Поэтому первый всегда сможет сделать ход, и выиграет второй.

Пусть n кратно трем. Приведем выигрышную стратегию для первого. Первым ходом он закрасит клетку, отстоящую на 3 от края; тогда полоска разбилась на не более, чем два куска, один из которых имеет длину 2 (назовем такой кусок *домино*). Покажем, что первый сможет добиться выполнения следующего условия:

• *После хода первого, если полоска разбита на k кусков, то не менее $k/2$ из них — домино. После хода второго, если полоска разбита на k кусков, то не менее $(k-1)/2$ из них — домино.*

В таком случае, после любого хода первого останется хотя бы один кусок (так как до его хода количество клеток было кратно трем), а значит, останется хотя бы одно домино; поэтому второй всегда сможет сделать ход и проиграет.

Итак, пусть после очередного хода первого условие выполняется. Второй своим ходом либо закрашивает домино (тогда число кусков k уменьшается на 1), либо закрашивает 2 клетки в большем куске (тогда k увеличивается не более, чем на 1). В любом случае, условие выполнено.

Если еще остался кусок длины 3 или больше, то первый закрашивает в нем третью клетку от края; тогда количество домино увеличивается хотя бы на 1, а k — не больше, чем на 1. Если остался кусок длины 1, то, закрасив его, первый просто уменьшает количество кусков. Наконец, если все куски — домино, то их хотя бы три, т. к. их суммарная длина делится на 3. Тогда после закрашивания первым произвольной клетки остается хотя бы три куска, из которых только один — не домино. Таким образом, после хода первого условие опять же выполнено.

11.8. **Ответ.** $x = y = z = t = 0$.

Первое решение. Возведем в квадрат обе части равенства $x + y = -(z + t)$, получим $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2zt + t^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 2(zt - xy) \Rightarrow (x^2 + y^2 - - z^2 - t^2)^2 = 4(zt - xy)^2$.

Раскрыв скобки, получим из этого равенства $4xyzt = A - \frac{B}{2}$, где $A = x^2y^2 + x^2z^2 + + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2$, $B = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$.

Отсюда $2N = 2(x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt) = 2(B + (A - \frac{B}{2})) = B + 2A = (x^2 + + y^2 + z^2 + t^2)^2$. Если $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \neq 0$, то в разложение числа N на простые сомножители двойка входит в нечетной степени, значит, N не является квадратом. Итак, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, что приводит к решению $x = y = z = t = 0$.

Второе решение. Пусть четверка чисел, не все из которых равны нулю, удовлетворяет условию задачи. Если каждое из них четно, разделим все числа на 2, получим четверку чисел, удовлетворяющих условию. Продолжим деление на 2 до тех пор, пока одно из чисел не станет нечетным. Так как сумма чисел нечетна, то среди них либо два нечетных, либо все они нечетные.

Если среди чисел два нечетных, то $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ имеет остаток 2 при делении на 4, и поэтому не является точным квадратом.

Пусть все числа нечетны: $x = 2a + 1$, $y = 2b + 1$, $z = 2c + 1$, $t = 2d + 1$, где $a + b + c + d = -2$. Покажем, что $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ делится на 8, но не делится на 16. Отсюда будет следовать, что N не является точным квадратом. Запишем $N = 16(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 32(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 24(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + + 8(a + b + c + d) + 4 + 4(4K + 2a + 2b + 2c + 2d + 1)$, где K — целое. Далее, так как $a + b + c + d = -2$, то $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ четно, откуда $N = 16M + 8$, где M — целое.