значим центр этой гомотетии через F. Заметим, что $OK = OK_1$, а $FK/FK_1 = KL/K_1L_1 \neq 1$, то есть точки O и F различны. Так как точки A и T при гомотетии переходят соответственно в C_1 и T_1, то F лежит на прямых AC_1 и TT_1. Но точка O также лежит на этих прямых; значит, прямые AC_1 и TT_1 совпадают, и $AT \perp (KLM)$.

Поскольку T — центр описанной окружности треугольника KLM, имеем $TK = TL = TM$, и прямоугольные треугольники ATK, ATL и ATM равны по двум катетам. Поэтому $\angle TAK = \angle TAL = \angle TAM$, что и требовалось.

11.8. Будем называть двухклеточные прямоугольники, на которые разбита доска, доминошками. Рассмотрим разбиение, показанное на рис. 10. В отмеченном фрагменте любые две доминошки содержат клетки, отстоящие на ход коня. Следовательно, чтобы наверняка раскрасить доску требуемым образом, потребуется не меньше 6 цветов.

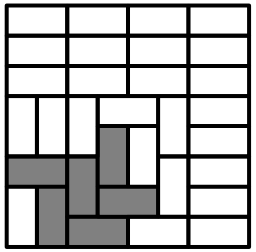

Рис. 10

Докажем, что это количество является достаточным. Начнем с раскраски вертикальных доминошек. Пронумеруем все вертикали доски по порядку и разобьем их на 3 группы по остаткам от деления номеров на 3. Тогда все доминошки, находящиеся на вертикалях одной группы, можно раскрасить в один цвет. Действительно, если две клетки отстоят на ход коня, то они находятся либо на соседних вертикалях, либо через одну вертикаль. Поэтому при такой раскраске никакие две клетки, раскрашенные в один цвет, не будут отстоять на ход коня. Раскрасив аналогичным образом горизонтальные доминошки в 3 других цвета, мы используем в общей сложности 6 цветов и получим требуемую раскраску.

Материалы для проведения

III-го (областного) этапа XXXIV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2007–2008 учебный год

Москва, 2007

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волченков, А.А. Гаврилюк, Р.А. Гимадеев, А.А. Глазырин, А.С. Голованов, А.В. Грибалко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, Н.С. Калинин, Р.Н. Карасев, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терешин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, В.П. Филимонов, Г.Р. Челноков, К.В. Чувилин, В.З. Шарич.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Обратно, если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то, как легко проверить,числа $x = 0$ и $x = 1$ являются решениями системы.

Утверждение доказано.

11.6. **Ответ.** $n = 2, k = 1$ и $n = 3, k = 1$.

Если $n = 2$ или $n = 3$, то, очевидно, $k = 1$.

Пусть $n > 3$. Разделим обе части равенства $(n-1)! = n^k - 1$ на $n - 1$:

$$(n-2)! = n^{k-1} + \ldots + 1.$$

Поскольку $n - 2 > 1$, левая часть четна. Если n нечетно, то справа стоит сумма k нечетных слагаемых; так как k нечетно, то нечетна и их сумма. При четном n нечетность такой суммы очевидна (впрочем, из условия сразу следует, что n нечетно при $n > 2$). Таким образом, при $n > 3$ левая и правая части последнего равенства имеют разную четность; следовательно, в этом случае решений нет.

Замечание. Как показывает пример $n = 5$, $k = 2$, при четных значениях k решения тоже возможны.

11.7. Пусть O — центр S, а T и T_1 — центры описанных окружностей треугольников KLM и $K_1L_1M_1$. Тогда $OT \perp (KLM)$, $OT_1 \perp (K_1L_1M_1)$, поэтому точки O, T и T_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям (KLM) и $(K_1L_1M_1)$.

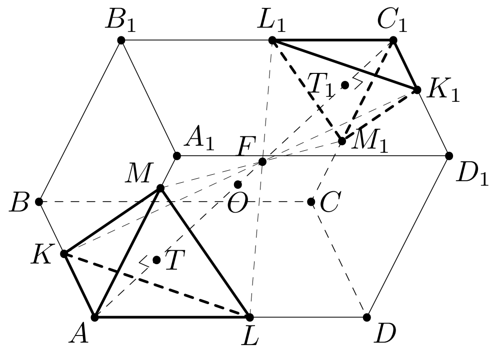

Рис. 9

В пирамидах $AKLM$ и $C_1K_1L_1M_1$ соответствующие грани параллельны, но эти пирамиды не равны. Значит, существует гомотетия, переводящая одну из этих пирамид в другую. Обовернув векторы одной из групп по часовой стрелке, а векторы другой — против часовой стрелки на угол α, можно добиться того, что угол между суммами новых векторов будет равен $180°$. Тогда сумма полученных векторов будет иметь длину

$$\left||\vec{S}'| - |\vec{T}'|\right| \leqslant 1,$$

что и требовалось.

11.4. **Ответ.** -1.

Пусть $a > 1$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - (ax + b)$; у нее по условию m корней. Тогда $f'(x) = \cos x - a < 0$ при любом x. Следовательно, функция $f(x)$ монотонна и потому имеет не больше одного корня. В то же время, подставляя $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp 1}{a}$, получаем, что в этих точках $f(x)$ принимает значения разных знаков $f(x_{1,2}) = \sin x_{1,2} \pm 1$. Значит, она имеет корень, откуда $m = 1$.

Аналогично, если $a < 1$, то функция $g(x) = x - (a\cos x + b)$ монотонна, поэтому число ее корней n не превосходит 1. С другой стороны, при $x_{1,2} = b \pm a$ функция принимает значения разных знаков $g(x_{1,2}) = a(\pm 1 - \cos x_{1,2})$, поэтому $n \geqslant 1$. Значит, в этом случае $n = 1$.

Итак, мы получили, что при любом значении a либо $m = 1$, либо $n = 1$. Следовательно, требуемое значение равно $mn - m - n = (m-1)(n-1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

Замечание. Если $a = 1$, то обе функции также монотонны, и $m = n = 1$. Но этот факт требует чуть более тщательного обоснования.

11.5. Складывая неравенства системы, получаем $(a+b+c)x^2 < (a+b+c)(x+1)$, то есть $(a+b+c)(x^2 - x - 1) < 0$, откуда $x^2 - x - 1 < 0$. Это неравенство имеет только два целочисленных решения 0 и 1. Значит, исходная система всегда имеет не более двух целочисленных решений, и этими решениями могут быть только числа 0 и 1. Подставляя их в систему, получаем

1) из $x = 0$: $0 < c$, $0 < b$, $0 < a$;

2) из $x = 1$: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, что выполнено для сторон треугольника.

Критерии оценивания решений задач

Общие критерии

Любое **правильное** решение задачи оценивается в 7 баллов (вне зависимости от его оптимальности и близости к решению в методической разработке). Решение считается правильным, если в нем описаны и обоснованы все промежуточные логические шаги.

Любой текст (сколь угодно длинный), не содержащий реальных продвижений в решении задачи (в том числе разбор частных случаев, сведение исходной задачи к не менее трудной), оценивается в 0 баллов.

В геометрических задачах попытки вычислительных решений, не доведенные до конечного результата, не считаются продвижениями в решении и оцениваются в 0 баллов.

Дополнительные критерии по отдельным задачам

8 класс

8.1. Предъявлен только правильный ответ (то есть верно указано число C) без обоснования максимальности — 2 балла.

Предъявлен правильный ответ (то есть верно указано число C) без обоснования максимальности, и указаны соответствующие числа A и B — 3 балла.

8.3. Предъявлен только ответ — 0 баллов.

За использование неверного утверждения о том, что из равенства $ab = bc = ca$ следует равенство $a = b = c$ — снимается 3 балла.

8.4. Приведен только ответ (без примера расстановки ладей) — 0 баллов.

Приведен только верный ответ с примером правильной расстановки ладей (без доказательства невозможности расстановки меньшего количества ладей) — 2 балла.

8.5. Только ответ (без обоснования или полученный на основе рассмотрения частных примеров) — 0 баллов.

При переборе вариантов не рассмотрен существенный случай — не более 3 баллов.

8.6. Только ответ без предъявления расстановки чисел на ступеньках — 0 баллов.

Предъявлена верная расстановка чисел, но не показано, что она удовлетворяет условию — 5 баллов.

8.8. Предъявление в случае $n = 3k$ выигрышной стратегии за второго игрока — 1 балл.

Предъявление в случае $n = 3k + 1$ выигрышной стратегии за второго игрока — 2 балла.

Предъявление в случае $n = 3k + 2$ выигрышной стратегии за первого игрока — 4 балла.

9 класс

9.1. Признак делимости на 9 разрешается использовать без доказательства.

Предъявлен только ответ (без верных обоснований) — 0 баллов.

Замечено, что все суммы цифр должны делиться на 9 — 2 балла.

9.2. Если в решении возникает перебор случаев (например, после разложения выражения на множители), и один из существенных случаев не разобран (или разобран неверно) — ставить не более 3 баллов.

9.3. Предъявлен только ответ (или ответ получен на основе разбора частного случая) — 0 баллов.

9.4. Приведен только правильный ответ (без примера расстановки ладей) — 0 баллов.

Приведен только ответ с примером правильной расстановки ладей (без доказательства невозможности расстановки меньшего количества ладей) — 2 балла.

9.5. Доказательство того, что число пассажиров меньше 60 — 4 балла.

Дан верный ответ и предъявлен верный пример для 48 пассажиров — 3 балла.

9.6. Только ответ без предъявления расстановки чисел на ступеньках — 0 баллов.

Предъявлена верная расстановка чисел, но не показано, что она удовлетворяет условию — 5 баллов.

9.8. Ответ без доказательства — 0 баллов.

Если предъявлен способ получения степени двойки, работающий не для всех натуральных n — не более 2 баллов.

10 класс

10.1. Признак делимости на 9 разрешается использовать без доказательства.

Предъявлен только ответ (без верных обоснований) — 0 баллов.

Замечено, что все суммы цифр должны делиться на 9 — 2 балла.

10.2. Указан только верный ответ с примером того, как помечены точки — 1 балл.

Получена система уравнений, связывающая количества точек, помеченных числами 1, 2, 3 — 2 балла.

10.4. Доказательство того, что $a \geqslant 116$ — 4 балла.

Приведен правильный ход решения для получения оценки $a \geqslant$

чество групп одноцветных клеток, содержащих нечетное число клеток, не может быть больше двух. Однако доска содержит 4 группы по 25 клеток одного цвета. Таким образом, ладья не сможет обойти нужным образом все клетки.

11 класс

11.1. Покажем, что $n = k + 1$. Если $n \geqslant k + 2$, то $n!/k!$ — это произведение двух или более последовательных натуральных чисел, причем ни одно из них не должно делиться на 5 (так как их произведение оканчивается на 8, то есть не делится на 5). Заметим, что последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей.

Покажем полным перебором, что это произведение не может оканчиваться на 8. Действительно, произведение двух последовательных чисел может оканчиваться на 2 ($1 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $6 \cdot 7$, $8 \cdot 9$) или на 6 ($2 \cdot 3$, $7 \cdot 8$); произведение трех последовательных чисел может оканчиваться на 6 ($1 \cdot 2 \cdot 3$, $6 \cdot 7 \cdot 8$) или на 4 ($2 \cdot 3 \cdot 4$, $7 \cdot 8 \cdot 9$); а произведение четырех последовательных чисел может оканчиваться только на 4 ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$).

Итак, $n = k + 1$, и тогда $n!/k! = n$, поэтому n оканчивается на 2008.

11.2. См. решение задачи 10.3.

11.3. Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — данные векторы. Покажем, что их можно разбить на две группы так, что длины сумм векторов в группах будут различаться не более, чем на 1.

Пусть $\vec{S} = \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n$, $\vec{S}_k = \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_k$, $\vec{T}_k = \vec{S} - \vec{S}_k = \vec{a}_{k+1} + \ldots + \vec{a}_n$. Обозначим $s_k = |\vec{S}_k|$, $t_k = |\vec{T}_k|$. Ясно, что $s_0 = 0 \leqslant |\vec{S}| = t_0$, но $s_n = |\vec{S}| \geqslant 0 = t_n$. Значит, найдется такое k, что $s_k \leqslant t_k$, но $s_{k+1} \geqslant t_{k+1}$.

Заметим, что $|s_{k+1} - s_k|$ и $|t_k - t_{k+1}|$ не превосходят $|\vec{a}_{k+1}| \leqslant 1$. Значит, $(t_k - s_k) + (s_{k+1} - t_{k+1}) \leqslant 2$, то есть либо $1 \geqslant t_k - s_k \geqslant 0$, либо $1 \geqslant s_{k+1} - t_{k+1} \geqslant 0$. В любом случае требуемое разбиение найдено.

Пусть $\vec{S'}$ и $\vec{T'}$ — суммы векторов в полученных группах, и пусть угол между этими суммами равен $180^\circ - 2\alpha$. Тогда, по-

Таким образом, утверждение верно и при $a = k + 1$. Переход доказан.

Замечание. Нетрудно доказать, что утверждение, обратное утверждению задачи, также верно.

По малой теореме Ферма, $a^n - a \,\vdots\, n$ при любых целом a и простом n. Однако существуют и составные числа n, для которых $a^n - a \,\vdots\, n$ при любом целом a (они называются числами Кармайкла); наименьшее из них — $n = 561$. В 1994 году было доказано, что чисел Кармайкла существует бесконечно много.

10.7. По построению, точки M и N лежат на окружности ω с диаметром BQ. Из симметрии относительно биссектрисы AI угла BAC следует, что $\angle API = \angle AMI$. Аналогично $\angle CPI = \angle CNI$, откуда $\angle API = \angle BNI$. Таким образом, $\angle AMI = \angle BNI$, следовательно, четырехугольник $BMIN$ вписанный. Итак, точка I также лежит на окружности ω, поэтому $\angle QIB = 90^\circ$.

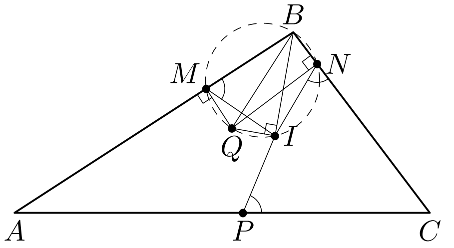

Рис. 7

10.8. **Ответ.** Не может.

Раскрасим клетки доски в 4 цвета (см. рис. 8). Тогда ладья, делая ход длиной в одну клетку, меняет цвет клетки, а если она делает ход длиной в две клетки, то переходит на клетку того же цвета. Поэтому, если первый ход ладьи был длиной в одну клетку, то все клетки доски, по которым проходила ладья, кроме первой и последней, разбиваются на пары одноцветных. Если же первый ход ладьи был длиной в две клетки, то все клетки можно разбить на одноцветные пары. Следовательно, если требуемый в условии обход возможен, то коли-

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

Рис. 8

$\geqslant 116$, но получен неверный ответ в силу арифметической ошибки — до 3 баллов.

Предъявлен верный пример уравнения для $a = 116$ — 3 балла.

10.5. Доказательство того, что число пассажиров меньше 60 — 4 балла.

Дан верный ответ и предъявлен верный пример для 48 пассажиров — 3 балла.

10.6. Доказательство приведено для некоторых (не для всех) n — 0 баллов.

За решения, в которых “доказывается”, что n простое — 0 баллов.

10.8. Ответ без доказательства — 0 баллов.

Разбор частных случаев обхода — 0 баллов.

11 класс

11.1. Задача сведена к конечному перебору случаев (например, указанием на то, что среди числе от $k + 1$ до n нет чисел, делящихся на 5) — 2 балла.

Упущен существенный случай в переборе вариантов — снимать не менее 2 баллов.

11.3. Только рассмотрение частных случаев (в том числе решение задачи для небольших значений n путем разбора случаев) — 0 баллов.

11.4. Только ответ (без обоснования или полученный на основе рассмотрения частных случаев) — 0 баллов.

11.5. Проверено, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то система имеет решения $x = 0$ и $x = 1$ — 1 балл.

Доказано, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то система имеет ровно два целочисленных решения — 2 балла.

Доказано (например, путем сложения неравенств), что система при любых положительных a, b, c имеет не более двух целочисленных решений — 2 балла.

Доказано, что если система имеет ровно два целочисленных решения, то a, b, c — длины сторон треугольника — 5 баллов.

11.6. Предъявлены оба верных ответа — 1 балл.

11.8. Только ответ без обоснований — 0 баллов.

Доказано, что менее, чем 6 цветов, не достаточно — 3 балла.

Доказано, что раскраска в 6 цветов всегда возможна — 4 балла.

Условия задач

8 класс

8.1. Даны шестизначные числа A и B. Число A состоит из четных цифр, число B — из нечетных, а в числе $C = A + B$ четные и нечетные цифры чередуются. Какое наибольшее значение может принимать C? *(М. Мурашкин)*

8.2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Точка, симметричная середине стороны AC относительно прямой BC, обозначена через A_2, а точка, симметричная той же середине относительно прямой AB — через C_2. Докажите, что отрезки A_1A_2 и C_1C_2 параллельны. *(Л. Емельянов)*

8.3. Существуют ли попарно различные действительные числа a, b, c такие, что $a(b-c) = b(c-a) = c(a-b)$? *(В. Сендеров)*

8.4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьей клетка находилась под боем хотя бы трех из них? (Ладья бьет клетку, если клетка находится с ней в одной горизонтали или вертикали, и между ними нет занятых клеток.) *(М. Мурашкин)*

8.5. Числа a, b, c и d таковы, что $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) < 0$. Число b — наибольшее из a, b, c и d. Определите, какое из чисел a, b, c и d — третье по величине. *(И. Рубанов)*

8.6. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел -2, -1, 1 или 2. Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек следует с нее шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдет через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной? *(М. Мурашкин)*

8.7. На сторонах треугольника ABC отмечены точки: L на BC, M на CA, и N на AB. Через точку L проведены две прямые: $l_c \parallel AB$ и $l_b \parallel AC$. Аналогично через точку M проведены прямые $m_a \parallel BC$ и $m_c \parallel AB$, а через точку N — прямые $n_b \parallel AC$ и

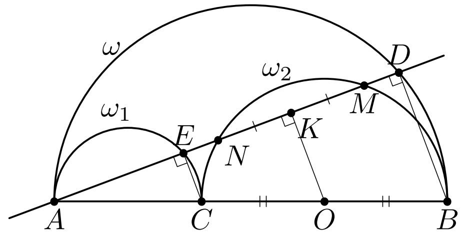

Рис. 6

Пусть $x_0 = 2{,}008\ldots$ — корень нашего уравнения. Обозначим $\varepsilon = x_0 - 2 = 0{,}008\ldots$. Тогда $0 = x_0^2 - ax_0 + b = (2+\varepsilon)^2 - a(2+\varepsilon) + b = (4-2a+b) + (4-a)\varepsilon + \varepsilon^2$, поэтому число $t = (4-a)\varepsilon + \varepsilon^2$ является целым. Ясно, что $t < 4\varepsilon < 0{,}04 < 1$. Далее, если $t = 0$, то $(4-a) + \varepsilon = 0$, что невозможно, так как ε нецелое. Поэтому $t \leqslant -1$, откуда $(4-a)\varepsilon < -1$ и $a - 4 > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{0{,}009} > 111$. Следовательно, $a \geqslant 116$.

Покажем, что значение $a = 116$ возможно. Рассмотрим уравнение $x^2 - 116x + 229 = 0$. Оно переписывается в виде $f(x) = (x-2)^2 - 112(x-2) + 1 = 0$. Заметим, что $f\left(2 + \frac{1}{112}\right) = \left(\frac{1}{112}\right)^2 > 0$, а $f(2{,}009) = 0{,}009^2 - 0{,}008 < 0$. Значит, у этого уравнения есть корень $x_0 \in \left(2 + \frac{1}{112}; 2{,}009\right)$. Поскольку $\frac{1}{112} = 0{,}008\ldots$, мы получаем, что $2{,}008 < x_0 < 2{,}009$, что и требовалось.

Замечание. Можно доказать, что уравнение $x^2 - 116x + 229 = 0$ — единственное уравнение с $a = 116$ и корнем вида $2{,}008\ldots$.

10.5. **Ответ.** 48 пассажиров.

См. решение задачи 9.5.

10.6. Докажем утверждение задачи индукцией по a. База очевидна: $1^n - 1 \vdots n$.

Пусть утверждение справедливо при некотором $a = k$, то есть $k^n - k \vdots n$. Полагая $a = k$, $b = 1$ в выражении $(a+b)^n - a^n - b^n$, видим, что $(k+1)^n - k^n - 1 \vdots n$. Получаем

$$(k^n - k) + ((k+1)^n - k^n - 1) = (k+1)^n - (k+1) \vdots n.$$

10 класс

10.1. **Ответ.** Не могут.

Предположим, что это возможно, и числа указанным образом разбиты на 18 четверок. Хотя бы в одной из четверок присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит — и всех произведений) делится на 9.

Поэтому произведение чисел в любой четверке делится на 9. Тогда в каждой четверке либо найдется число, делящееся на 9 (четверки 1-го типа), либо найдутся два числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 9 (четверки 2-го типа). Среди 72 последовательных натуральных чисел ровно 8 делящихся на 9 чисел, и ровно 16 чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Следовательно, имеется не более 8 четверок 1-го типа и не более 8 четверок 2-го типа; однако, всего четверок $18 > 8 + 8$. Противоречие.

10.2. **Ответ.** $n = 199$.

Пусть a точек помечены числом 1, b точек помечены числом 2, и c точек помечены числом 3. Тогда количества отрезков, помеченных числами 1, 2, 3, равны соответственно bc, ca и ab. Получаем равенства $n = a + bc = b + ca = c + ab$. Отсюда $(a + bc) - (b + ca) = (a - b)(1 - c) = 0$. Аналогично $(b - c)(1 - a) = (c - a)(1 - b) = 0$.

Пусть среди чисел a, b, c нет двух чисел, равных 1. Тогда получаем, что $a = b = c$; это невозможно, так как 200 не делится на 3. Если же два из чисел a, b, c равны 1, то третье равно 198; в этом случае равенства выполнены, и $n = 199$.

10.3. Так как AB и AC — диаметры окружностей ω и ω_1, то $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$. Центр O окружности ω_2 является серединой отрезка BC. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из O на AD; тогда точка K является серединой хорды MN. С другой стороны, $CE \parallel OK \parallel BD$, и по теореме Фалеса K является серединой отрезка DE. Итак, отрезки MN и DE имеют общую середину, откуда следует утверждение задачи.

10.4. **Ответ.** $a = 116$.

$n_a \parallel BC$. Докажите, что если прямые m_a, n_b и l_c пересекаются в одной точке, то прямые m_c, n_a и l_b образуют треугольник, равный ABC. *(Л. Емельянов)*

8.8. На окружности отмечены $2n \geqslant 6$ точек, делящих её на равные дуги. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы обвести кружочками пару диаметрально противоположных точек и ещё одну точку. Дважды обводить одну и ту же точку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто из игроков имеет стратегию, позволяющую ему выиграть независимо от ходов соперника? (Дайте ответ в зависимости от n.) *(И. Рубанов)*

9 класс

9.1. 99 последовательных натуральных чисел разбили произвольным образом на 33 группы по 3 числа, в каждой группе посчитали произведение чисел, и у каждого из 33 полученных произведений посчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными? *(Н. Агаханов)*

9.2. Ненулевые числа a, b и c таковы, что $a^2(b + c - a) = b^2(c + a - b) = c^2(a + b - c)$. Докажите, что $a = b = c$. *(В. Сендеров)*

9.3. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD описана около окружности. Известно, что $\angle BCD = 2\angle BAD$. Найдите отношение $\frac{AB}{BC}$. *(М. Мурашкин)*

9.4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьей клетка находилась под боем хотя бы трех из них? (Ладья бьет клетку, если клетка находится с ней в одной горизонтали или вертикали, и между ними нет занятых клеток.) *(М. Мурашкин)*

9.5. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{12}$ из них в номере билета есть цифра 7? *(М. Мурашкин)*

9.6. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел -2, -1, 1 или 2. Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек следует с нее шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдет через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной? (*М. Мурашкин*)

9.7. На сторонах треугольника ABC отмечены шесть точек: C_1 и C_2 на AB, A_1 и A_2 на BC, B_1 и B_2 на CA. Известно, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$ и $C_1A_2 \parallel AC$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики. (*Л. Емельянов*)

9.8. Каждое натуральное число от 1 до n ($n \geqslant 2$) домножили на некоторую степень двойки с неотрицательным целым показателем, после чего все числа сложили. Полученная сумма также оказалась степенью двойки. При каких n такое возможно? (*М. Мурашкин, А. Кришеник*)

10 класс

10.1. 72 последовательных натуральных числа разбили произвольным образом на 18 групп по 4 числа, в каждой группе посчитали произведение чисел, и у каждого из 18 полученных произведений посчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными? (*Н. Агаханов*)

10.2. На плоскости расставлены 200 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая точка помечена числом 1, 2 или 3, после этого проведены все отрезки, соединяющие пары точек, помеченных различными числами. Каждый отрезок помечен числом (1, 2 или 3), отличным от чисел в его концах. В результате оказалось, что каждое из трех чисел написано на плоскости ровно по n раз. Найдите n. (*П. Кожевников*)

10.3. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая l пересекает окружность ω в точках A

2. Если точки A_1 и C_1 лежат соответственно на отрезках BC и AB, то $S_{A_1BC_1} = \frac{BA_1}{BA} \cdot \frac{BC_1}{BC} \cdot S_{ABC}$.

Обозначим $x = \frac{BA_1}{BC} = \frac{AB_2}{AC}$, $y = \frac{CB_1}{CA} = \frac{BC_2}{BA}$, $z = \frac{AC_1}{AB} = \frac{CA_2}{CB}$ (см. рис. 5). Тогда $S_{A_1BC_1} = x(1-z)S$, $S_{C_1AB_1} = z(1-y)S$, $S_{B_1CA_1} = y(1-x)S$, где S — площадь треугольника ABC. Значит, $S_{A_1B_1C_1} = S - S_{A_1BC_1} - S_{C_1AB_1} - S_{B_1CA_1} = S(1 - x - y - z + xy + yz + zx)$.

Находя аналогичным образом $S_{A_2B_2C_2}$, приходим к тому же выражению через S и x, y, z.

9.8. **Ответ.** При всех.

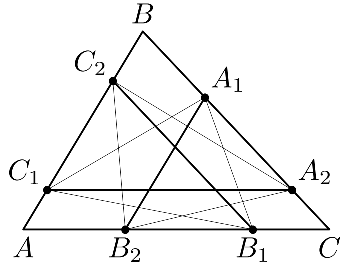

Рис. 5

Покажем, что можно некоторые числа домножить на $1 = 2^0$, а остальные — на $2 = 2^1$ так, чтобы сумма стала степенью двойки.

Сумма всех чисел до домножения равна $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Пусть k — максимальное такое число, что $2^k < \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда $2^{k+1} \geqslant \frac{n(n+1)}{2} > 2^k$, поэтому $A = 2^{k+1} - \frac{n(n+1)}{2} < 2^k < \frac{n(n+1)}{2}$. Покажем, что можно выбрать несколько чисел из $1, 2, \ldots, n$ так, чтобы их сумма была равна A. Тогда, удвоив эти числа, мы увеличим сумму всех чисел на A, и она станет равна $\frac{n(n+1)}{2} + A = 2^{k+1}$, что и требовалось.

Пусть d — максимальное число такое, что $\frac{d(d-1)}{2} \leqslant A$. Тогда $d \leqslant n$, так как $A < \frac{n(n+1)}{2}$. Далее, $\frac{d(d-1)}{2} \leqslant A < \frac{d(d+1)}{2}$, поэтому $0 < B = \frac{d(d+1)}{2} - A \leqslant \frac{d(d+1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d$. Таким образом, $A = \frac{d(d+1)}{2} - B = (1+2+\ldots+d) - B$, то есть A есть сумма всех чисел от 1 до d, кроме B, что и требовалось.

уравнения третьей степени, могут решить эту задачу практически без вычислений. Достаточно доказать, что среди чисел a, b, c есть равные. Предположим противное. Тогда a, b, c — корни некоторого уравнения $x^2(s-2x)=t$, где $s=a+b+c$. По формулам Виета $a+b+c=\frac{s}{2}$, значит $s=\frac{s}{2}$, $s=0$, и $-2a^3=-2b^3=-2c^3$. Отсюда $a=b=c$. Противоречие.

9.3. **Ответ.** $\frac{AB}{BC}=2$.

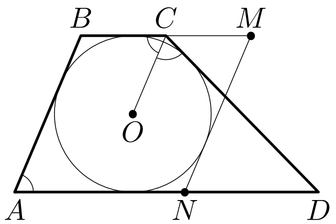

Рис. 4

Обозначим через O центр окружности, вписанной в трапецию. Так как CO — биссектриса угла BCD, то $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$, откуда $CO \parallel AB$. Рассмотрим прямую MN, симметричную прямой AB относительно центра O (M и N — точки на прямых BC и AD соответственно). Она касается окружности и параллельна AB. Прямая CO равноудалена от сторон AB и MN параллелограмма $ABMN$, откуда $BC=CM=\frac{BM}{2}$. Параллелограмм $ABMN$ является ромбом, так как описан около окружности, поэтому $AB=BM$, и значит $\frac{AB}{BC}=\frac{BM}{BC}=2$.

9.4. **Ответ.** 16 ладей.

См. решение задачи 8.4.

9.5. **Ответ.** 48 пассажиров.

Пусть k — число пассажиров, у которых в билете есть цифра 7. Тогда число всех пассажиров равно $12k$. Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащий семерку на конце. Значит, $12k<10(k+1)$, откуда $2k<10$, $k<5$. При $k=4$ искомый набор номеров существует, например: 100008, 100009, 100010, $\ldots$, 100055.

9.6. **Ответ.** Может.

См. решение задачи 8.6.

9.7. Для решения будем использовать два очевидных факта.

1. Если точка M лежит на отрезке PQ и $\frac{PM}{PQ}=x$, то $\frac{QM}{PQ}=1-x$.

и D, окружность ω_1 — в точках A и E, а окружность ω_2 — в точках M и N. Докажите, что $MD=NE$. *(П. Кожевников)*

10.4. У трехчлена x^2-ax+b коэффициенты a и b — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с $2{,}008\ldots$. Найдите наименьшее возможное значение a. *(И. Богданов)*

10.5. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{12}$ из них в номере билета есть цифра 7? *(М. Мурашкин)*

10.6. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных a и b число $(a+b)^n-a^n-b^n$ делится на n. Докажите, что a^n-a делится на n для любого натурального a. *(В. Сендеров)*

10.7. Пусть P — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. На сторонах AB и CB взяты точки M и N соответственно так, что $AM=AP$ и $CN=CP$. Перпендикуляры, проведенные в точках M и N к сторонам AB и BC соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle QIB=90^\circ$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. *(Т. Емельянова)*

10.8. Может ли ладья обойти все клетки шахматной доски 10×10, побывав на каждой клетке ровно по разу, чередуя ходы длиной в одну и в две клетки? (Считается, что, делая ход в две клетки, ладья не проходит по промежуточной клетке.) *(А. Грибалко)*

11 класс

11.1. Натуральные числа n и k, $n>k$, таковы, что число $\frac{n!}{k!}$ оканчивается на 2008. Докажите, что число n также оканчивается на 2008. (Через $n!$ обозначено произведение всех целых чисел от 1 до n: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.) *(Н. Агаханов)*

11.2. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая l пересекает окружность ω в точках A

и D, окружность ω_1 — в точках A и E, а окружность ω_2 — в точках M и N. Докажите, что $MD = NE$. *(П. Кожевников)*

11.3. На плоскости даны n векторов, длина каждого не превосходит 1. Докажите, что можно выбрать α и повернуть все векторы на угол α (некоторые — по часовой стрелке, а некоторые — против) так, чтобы длина суммы векторов нового набора не превосходила 1. *(Д. Терешин)*

11.4. Пусть m — количество решений уравнения $\sin x = ax + b$, а n — количество решений уравнения $x = a\cos x + b$ (a и b — положительные действительные числа, причем $a \neq 1$). Какие значения может принимать выражение $mn - m - n$? *(И. Богданов)*

11.5. Назовем тройку положительных чисел (a, b, c) *удобной*, если система неравенств $ax^2 < bx + c$, $bx^2 < cx + a$, $cx^2 < ax + b$ имеет ровно два целых решения. Докажите, что тройка (a, b, c) удобна тогда и только тогда, когда a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. *(Н. Агаханов)*

11.6. Найдите все такие пары натуральных чисел n, k, что $n > 1$, k — нечетно, и $(n-1)! + 1 = n^k$. *(В. Сендеров)*

11.7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера S с центром на диагонали AC_1 пересекает ребра AB, AD, AA_1 в точках K, L, M соответственно, а ребра C_1D_1, C_1B_1, C_1C — в точках K_1, L_1, M_1 соответственно. Оказалось, что плоскости KLM и $K_1L_1M_1$ параллельны, но треугольники KLM и $K_1L_1M_1$ неравны. Докажите, что диагональ AC_1 образует равные углы с ребрами AB, AD и AA_1. *(П. Кожевников)*

11.8. Шахматную доску разбили на двухклеточные прямоугольники. Каждый из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были раскрашены в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит для этого? (Ход коня состоит в перемещении на две клетки по горизонтали и одну по вертикали, или же на две клетки по вертикали и одну по горизонтали.) *(А. Грибалко)*

лось хотя бы 4 необведенных точки. При этом максимум две из них непарные; поэтому осталась пара необведенных противоположных точек и еще хотя бы одна необведенная, кроме них. Это и значит, что первый всегда сможет сделать ход и выиграет.

9 класс

9.1. **Ответ.** Не могут.

Предположим, что это возможно, и числа указанным образом разбиты на 33 тройки. Хотя бы в одной из троек присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит — и всех произведений) делится на 9. Поэтому произведение чисел в любой тройке делится на 9, а следовательно, и на 3. Но среди 99 последовательных натуральных чисел ровно 33 делящихся на 3 числа, поэтому в каждой тройке ровно одно такое число. Однако при этом 22 из них не делятся на 9, значит, и произведения в соответствующих тройках не делятся на 9. Противоречие.

Замечание. См. также решение задачи 10.1.

9.2. **Первое решение.** Первое равенство преобразуется к виду $c(a^2-b^2)+ab(a-b)-(a^3-b^3) = 0$, или $(a-b)(c(a+b)-a^2-b^2) = 0$, откуда либо $a = b$, либо $c(a+b) - (a^2+b^2) = 0$. В первом случае из второго равенства задачи получаем $a^2+c^2 = 2ac$, $(a-c)^2 = 0$, $a = c$. Значит, без ограничения общности можно рассматривать лишь второй случай: $c(a+b) = a^2+b^2$. Аналогично можно считать, что $a(b+c) = b^2+c^2$, $b(c+a) = c^2+a^2$. Сложив последние три равенства, получаем: $2ab + 2bc + 2ca = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$, или $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, откуда опять же $a = b = c$. Утверждение задачи доказано.

Второе решение. Пусть $|c| \leqslant |a|$, $|c| \leqslant |b|$. Как и выше, получаем равенство $c(a+b) = a^2+b^2$.

Имеем: $a^2 + b^2 = c(a+b) = ca + cb \leqslant |ca| + |cb| \leqslant a^2 + b^2$. Отсюда $ca = a^2$, $cb = b^2$, или $c = a$, $c = b$, что и требовалось доказать.

Замечание. Школьники, знающие формулы Виета для сторон имеем $\angle ANN_1 = \angle L_1PM$ и $\angle NAN_1 = \angle PL_1M$. Тогда эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам, и $AN_1 = L_1M = LA_1$.

Получаем $C_1A_1 = C_1L + LA_1 = N_1C + AN_1 = AC$. Теперь можно утверждать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим углам.

8.8. **Ответ.** При $n = 3k$ или $n = 3k + 1$ выигрывает второй, а при $n = 3k + 2$ — первый.

В каждом случае мы приведем одну из возможных выигрышных стратегий для игрока.

Назовем обведенную точку *непарной*, если противоположная ей не обведена. Ясно, что после каждого хода количество непарных точек либо уменьшается на 1 (если игрок обвел точку, противоположную непарной), либо увеличивается на 1 (в противном случае). В каждом случае выигрышная стратегия будет заключаться в уменьшении числа непарных точек.

1. Приведем стратегию второго, позволяющую ему выиграть при $n = 3k$ или $n = 3k + 1$. После хода первого число непарных точек нечетно, поэтому каждым своим ходом второй может уменьшить это число на 1. Тогда после каждого хода первого это число будет равно 1, а после хода второго — 0.

Покажем, что тогда второй всегда сможет сделать такой ход. Если первый уже сделал d ходов, то обведено $6d - 3$ точек; но, так как $2n = 6k$ или $2n = 6k + 2$, то осталось хотя бы три необведенных точки, из которых ровно одна непарная. Значит, еще осталась пара необведенных противоположных точек, и второй всегда сможет сделать требуемый ход — а значит, выиграет.

2. Теперь приведем стратегию первого, позволяющую ему выиграть, если $n = 3k + 2$. Если после хода второго остались непарные точки, то он уменьшает их число на 1, в противном случае он создает единственную непарную точку. Тогда нетрудно видеть, что после каждого хода второго остается 0 или 2 непарных точки, а после каждого хода первого — ровно одна.

Покажем, что первый всегда сможет сделать такой ход. Если второй сделал d ходов, то обведено $6d$ точек, а значит, оста-

Решения задач

8 класс

8.1. **Ответ.** 1878787.

Будем складывать числа A и B столбиком. Так как последние цифры чисел A и B разной четности, то последняя цифра числа C нечетная. Пронумеруем разряды справа налево. При этом из первого разряда обязан произойти перенос во второй разряд, иначе вторая с конца цифра в числе C также была бы нечетной. Аналогично, из третьего и пятого разрядов также должен произойти перенос. Заметим, что ни в одном из этих разрядов в числе C девятка стоять не может, так как единственный способ получить одновременно и девятку, и перенос — это сложить две девятки и единицу, пришедшую из предыдущего разряда; однако в числе A нет девяток.

Если число C шестизначное, то оно не превосходит 999999. Если же оно семизначное, то его седьмая (с конца) цифра может быть только единицей. Значит, его четные цифры — четные и не превышают 8, а нечетные, по вышесказанному, не больше 7. Таким образом, число C не может превышать 1878787. Это возможно, например, так: $1878787 = 886868 + 991919$.

8.2. Обозначим середину стороны AC через K, а точку пересечения KA_2 с BC через P. В прямоугольном треугольнике AA_1C отрезок KP — средняя линия, так как он проходит через середину AC и параллелен AA_1 (поскольку $KP \perp BC$). Значит, прямоугольные треугольники PA_1A_2 и PCK равны по двум катетам: $A_1P = PC$ и $KP = PA_2$. Отсюда следует, что $\angle PA_1A_2 = \angle PCK$, то есть отрезок A_1A_2 параллелен стороне AC.

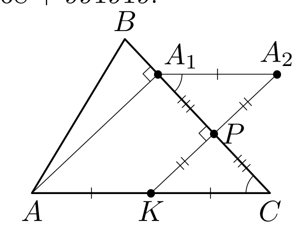

Рис. 1

Аналогично доказывается, что $C_1C_2 \parallel AC$. Поэтому $A_1A_2 \parallel \parallel AC \parallel C_1C_2$.

8.3. **Ответ.** Не существуют.

Первое решение. Обозначим $x = a(b - c)$, $y = b(c - a)$, $z = c(a - b)$. Так как $x + y + z = 0$, то $x = y = z = 0$. Значит, либо разность хотя бы в одной из скобок равна 0, либо $a = b = c = 0$. В обоих случаях нашлись два равных числа.

Второе решение. Пусть для определенности $ab \geqslant ac$, $ab \geqslant bc$. Раскрывая скобки в равенстве $a(b - c) = b(c - a)$, получаем $2ab = ac + bc$. Значит, $ab = ac = bc$. Если все три числа ненулевые, то немедленно получаем $a = b = c$. Иначе, если $ab = ac = bc = 0$, то хотя бы два из чисел a, b, c должны быть нулями, то есть должны быть равны.

Замечание. Легко видеть, что если $a = b \neq 0$, то $a = b = c$.

8.4. Нетрудно проверить, что расстановка на рис. 2 удовлетворяет условию. Допустим, существует такая расстановка, когда ладей меньше, чем 16. Если на какой-либо горизонтали нет ни одной ладьи, то каждая из ее клеток может находиться под боем не более двух ладей. Следовательно, на одной из горизонталей (назовем ее H) должна стоять ровно одна ладья (назовем ее r). Рассмотрим любую из семи свободных клеток на H. Сверху и снизу от нее должно находиться по ладье, поэтому ладей хотя бы $1 + 2 \cdot 7 = 15$. Значит, их ровно 15, причем семь из них стоят выше H, а другие семь — ниже.

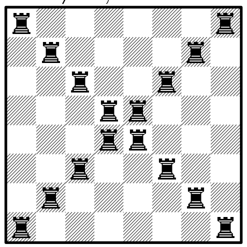

Рис. 2

На вертикали, где стоит r (назовем ее V), больше ладей нет. Поэтому, из аналогичных соображений, на любой горизонтали, кроме H, стоят ровно две ладьи: одна левее V, другая — правее (если их больше двух, то всего ладей уже 16). Значит, сверху от H стоит четное число ладей; но мы знаем, что их 7. Противоречие.

8.5. **Ответ.** Третье по величине число — d.

Из условия следует, что $a - b < 0$, $b - c > 0$. Поэтому $(c - d)(d - a) > 0$. Значит, либо $c > d$ и $d > a$, либо $c < d$ и $d < a$. В первом случае получаем $b > c > d > a$, во втором случае $b > a > d > c$. В обоих случаях третье по величине число — d.

Замечание. В частности, мы показали, что при данных условиях все числа различны.

8.6. **Ответ.** Может.

Например, сумма будет отрицательной, если числа на ступеньках равны (снизу вверх) 1, 2, -2, 2, -2, …, 2, -2, -2 (на всех четных ступеньках, кроме 2008-й, написано 2, а на всех нечетных, кроме первой, написано -2). Если путь начнется со ступеньки с четным номером, то он пойдет вверх по четным ступенькам до 2008-й, а далее зациклится. Если же путь начнется со ступеньки с нечетным номером, то он пойдет по нечетным ступенькам до первой, далее пройдет через вторую и все четные, вплоть до 2008-й.

8.7. Обозначим через C_1 точку пересечения n_a и l_b, а через A_1 — точку пересечения l_b и m_c. Пусть прямые m_a, n_b и l_c пересекаются в точке P, а сторона AC пересекается с l_c и n_a в точках L_1 и N_1, соответственно (см. рис. 3). Четырехугольник C_1LCN_1 — параллелограмм, так как $C_1N_1 \parallel LC$ и $C_1L \parallel N_1C$. Значит, $C_1L = N_1C$.

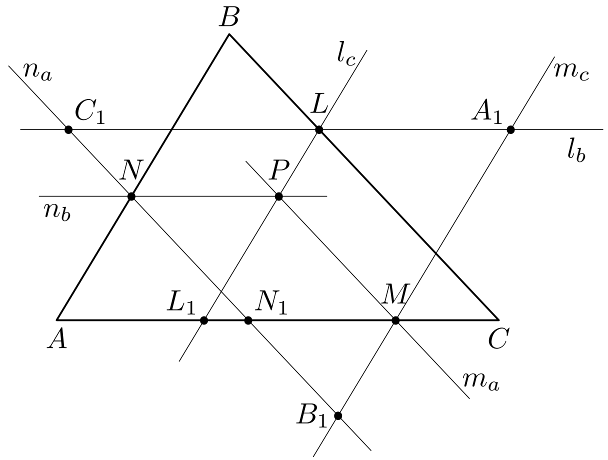

Рис. 3

Аналогично, LA_1ML_1 — параллелограмм, откуда $LA_1 = L_1M$.

Рассмотрим треугольники ANN_1 и L_1PM. В них $AN = L_1P$ (так как $ANPL_1$ — параллелограмм), а из-за параллельности